IL

NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Vol. X, N. 2

Serie nona

1º Febbraio 1953

Energy in the Nuclear Field.

E. M. WILLIAMSON

Bedford College, University of London

(ricevuto il 22 Novembre 1952)

Summary. - The various types of nuclear field may be described by tensors of suitable rank in a five dimensional continuum which satisfy field equations whose form is suggested by electromagnetic theory. The five dimensional notation suggests the adoption of a generalised energy tensor which is found to consist of terms usually introduced separately as field energy and interaction energy respectively. It follows from the nuclear field equations that the total energy is now finite. An alternative expression for the interaction energy is obtained from the fundamental equation of the nucleon in the presence of the nuclear field. This contains terms involving the field tensors which indicate an additional amount of energy. Comparison of this expression with that part of the total energy which is considered to be interaction energy identifies the polarization tensors associated with the nucleon. The interaction energies are calculated for the two-nucleon problem and found to be of the usually accepted type. The new suggestion, however, is that any infinite terms which arise are balanced by corresponding terms in the field energy. Although this has previously been pointed out in a simple case the present paper shows that this property is shared by all types of nuclear field. The results are finally expressed in the usual fourdimensional notation but the five-dimensional approach introduces a coherence into the treatment of the problem, as Klein has shown it does in other branches of physics.

Introduction.

A theory of the scalar nuclear field suggested by H. T. FLINT (1) in 1947 was based on an analogy with the electromagnetic theory of a polarizable medium. From a five dimensional energy-momentum-charge tensor the total energy of the field and the nucleon was obtained and it was found that, in the so-called static case, this total energy was zero. The suggestion was made that the infinite terms which commonly occur in nuclear field problems may arise from the division of this finite energy into two parts, each containing an infinite term.

The purpose of the present paper is to show that the same conclusion applies to all types of nuclear field.

In each case, introducing field quantities analogous to the polarizations of the electromagnetic theory, the total energy is divided into two parts which may be regarded as pure field energy and interaction energy respectively. The latter when evaluated is of the usually accepted form for each type of field but the infinite terms are balanced by corresponding terms in the field energy.

The Quantum Equation.

The fundamental particle, proton or neutron, in a nuclear field is represented by the equation

(1)
$$\gamma^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} = \gamma^{\mu} H_{\mu} \psi, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5),$$

which is regarded as a law of gauging arising from the geometry and metric of the five-dimensional continuum (2). The tensor H_{μ} describes the nuclear field; the electromagnetic field is described by the usual vector potential Φ_m occurring in the matrices γ_m . (Greek indices will take the values 1-5 throughout and Roman indices, except where otherwise indicated, the values 1-4).

In this five-dimensional geometry the fifth co-ordinate x^5 plays a special role. When it occurs explicitly it does so in the factor $\exp \left[2\pi i x^5/l_0\right]$ where l_0 is some fundamental length. When considering the dependence of the wave function ψ upon x^5 the appropriate value of l_0 is h/M_0c where M_0 is the rest

⁽¹⁾ H. T. FLINT: Phil. Mag., (7), 38, 22 (1947).

⁽²⁾ H. T. FLINT: Phil. Mag., (7), 36, 635 (1945).

mass of the fundamental particle, in this case the nucleon. For field quantities, however, this fundamental length is $h/\mu_0 c$ where μ_0 is the rest mass of the particle associated with the field, i.e. the appropriate meson.

In the absence of a nuclear field equation (1) reduces to

$$\gamma^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} = 0 ,$$

which is the Dirac equation for a free nucleon.

The field operator H_{μ} may be expanded generally in the form

$$H_{\mu} = g_1 T_{\mu} + g_2 \gamma^{\nu} T_{\mu\nu} + g_3 \gamma^{\nu} \gamma^{\varrho} T_{\mu\nu\varrho} + g_4 \gamma^{\nu} \gamma^{\varrho} \gamma^{\sigma} T_{\mu\nu\varrho\sigma} \,,$$

where $g_1, g_2...$ are constants, which may be complex, and the five-dimensional tensors T_{μ} , $T_{\mu\nu}...$ represent the different types of nuclear field; i.e. scalar, vector, pseudovector and pseudoscalar respectively; the last three tensors being antisymmetric.

These tensors are analogous to the antisymmetric tensor B_{mn} formed by the field quantities B and E of the electromagnetic theory. Associated with the latter in the case of a polarizable medium is another antisymmetric tensor H^{mn} formed by the other field quantities H and D.

The electromagnetic field equations are

$$\frac{\partial H^{nn}}{\partial x^n} = 0 ,$$

and

(5)
$$\frac{\partial B_{mn}}{\partial x^l} + \frac{\partial B_{lm}}{\partial x^n} + \frac{\partial B_{nl}}{\partial x^m} = 0.$$

In the same way it may be supposed that there is a second set of tensors V^{μ} , $V^{\mu\nu}$... etc., associated with the nuclear field and that the field equations are of the same form as equations (4) and (5).

The magnetic and electric polarizations of a medium are related to the corresponding electromagnetic field quantities by the equations

$$(6) B = H + M$$

and

$$D = E + P$$
.

An analogous polarization tensor, S, is introduced into the nuclear theory by the equation

$$(8) T = V + S.$$

This tensor may be regarded as the source of the meson field and it will be shown that it does in fact consist of the various tensor quantities usually associated with the nucleon.

The nuclear forces are so great compared with those of electromagnetism and gravitation that it is usually not necessary to take these latter into account. The distinction between covariance and contravariance may therefore be dropped.

The Field Equations.

The scalar field is described by the equations

$$\frac{\partial T_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial T_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \; ,$$

$$\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 ,$$

and

(11)
$$T_{\mu} = V_{\mu} + S_{\mu} .$$

For the vector field

(12)
$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial T_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial V^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 ,$$

and

(14)
$$T_{\mu\nu} = V_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \,.$$

For the pseudovector field

$$\frac{\delta T_{\mu\nu\lambda}}{\delta x^{\varrho}} - \frac{\delta T_{\varrho\mu\nu}}{\delta x^{\lambda}} + \frac{\delta T_{\lambda\varrho\mu}}{\delta x^{\nu}} - \frac{\delta T_{\nu\lambda\varrho}}{\delta x^{\mu}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial V^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = 0 ,$$

and

$$T_{\mu\nu\lambda} = V_{\mu\nu\lambda} + S_{\mu\nu\lambda} .$$

For the pseudoscalar field

(18)
$$\frac{\partial T_{\mu\nu\lambda\varrho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial T_{\sigma\mu\nu\lambda}}{\partial x^{\varrho}} + \frac{\partial T_{\varrho\sigma\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial T_{\lambda\varrho\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial T_{\nu\lambda\varrho\sigma}}{\partial x^{\mu}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial V^{\mu\nu\lambda\varrho}}{\partial x^\varrho} = 0 \; ,$$

and

$$(20) T_{\mu\nu\lambda\varrho} = V_{\mu\nu\lambda\varrho} + S_{\mu\nu\lambda\varrho} \,.$$

The nuclear field quantities, unlike those of the electromagnetic field, will be complex since they describe particles which may be charged. There is, therefore, a corresponding set of equations for the complex conjugate quantities.

For the nuclear field in free space the polarization tensor S will be zero and T = V.

Then, for the scalar field for instance, differentiating equation (9) and making use of equation (10)

$$\frac{\partial^2 T^{\mu}}{\partial x^{\nu^2}} = 0.$$

But for any field quantity such as T_{μ}

(22)
$$\frac{\delta T_{\mu}}{\delta x^{5}} = (2\pi i \mu_{0} e/h) T_{\mu} = ik T_{\mu} ,$$

by reason of the special nature of the dependence on x^5 . Hence equation (21) becomes

$$\nabla^2 T_\mu - \frac{1}{c^2} \; \frac{\eth^2 T_\mu}{\eth t^2} = (4\pi^2 \mu_0^2 c^2/h^2) T_\mu \; , \label{eq:power_state}$$

which is the Klein-Gordon equation appropriate to the field with which is associated a particle of rest mass μ_0 .

This applies also to the other types of nuclear field.

When the field equations are written out explicitly, putting S=0 and differentiating with respect to x^5 as in equation (22), they are found to be

identical with those of Kemmer (3) for the free meson field, his field quantities χ and Φ being the four-dimensional counterparts of the five-dimensional tensor T.

In the presence of polarizable matter, i.e. other nucleons, the general forms of the equations (9) to (20) must be retained. The equations of the vector field when written out explicitly are identical with those of Yukawa, Sakata and Taketani (4) and the equations of the pseudo-scalar field with those of Tanikawa and Yukawa (5).

The pseudovector and scalar field quantities are the duals of the vector and pseudoscalar field quantities respectively and the explicit field equations are therefore of the same form.

The Total Energy.

By analogy with the electromagnetic theory an energy-momentum-charge tensor, $R^{\mu\nu}$, is defined for each type of field.

Scalar field,

$$R^{\mu_{_{\boldsymbol{y}}}} = \frac{1}{2} \left(V^{*\mu} T_{_{\boldsymbol{y}}} - \frac{1}{2} \, \gamma^{\mu_{_{\boldsymbol{y}}}} V^{*\alpha} T_{_{\boldsymbol{\alpha}}} + \text{complex conjugate terms} \right).$$

Vector field,

$$(25) R^{\mu_{\nu}} = \frac{1}{2} \left(V^{*\mu\alpha} T_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \gamma^{\mu_{\nu}} V^{*\alpha\beta} T_{\alpha\beta} + \text{c. c. terms} \right).$$

Pseudovector field,

(26)
$$R^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} V^{*\mu\alpha\beta} T_{\nu\alpha\beta} - \frac{1}{12} \gamma^{\mu}_{\nu} V^{*\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\beta\gamma} + \text{c. c. terms} \right).$$

Pseudoscalar field,

$$(27) \hspace{1cm} R^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2} \Big(\frac{1}{6} \; V^{*\mu\alpha\beta\gamma} T_{\nu\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{48} \; \gamma^{\mu}_{\nu} V^{*\alpha\beta\gamma\epsilon} T_{\alpha\beta\gamma\epsilon} + {\rm c. \ c. \ terms} \Big) \; .$$

The changing numerical factors arise from the antisymmetry of the field components.

⁽³⁾ N. KEMMER: Proc. Roy. Soc., (A), 166, 127 (1938).

⁽⁴⁾ H. Yukawa, S. Sakata and M. Taketani: Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 20, 319 (1938).

⁽⁵⁾ Y. Tanikawa and H. Yukawa: Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 23, 445 (1941).

The energy density is given by $W=-R^{44}$ and the total energy of the system is $\int W d\tau$ where the integral is taken throughout three-dimensional space, $d\tau$ being the element of volume. The integral may be evaluated for each field with the help of the corresponding field equations.

For the scalar field

The first term may be integrated by parts; then, assuming that the field quantities vanish at the boundaries and making use of the equation conjugate to (10),

$$\int W \,\mathrm{d} au = rac{1}{4kc} \int \Bigl(V^{*4} rac{\partial T_5}{\partial t} - rac{\partial V^{*4}}{\partial t} \, T_5 \Bigr) \,\mathrm{d} au + \mathrm{e.\,e.} \qquad ext{since } x_4 = ict.$$

For the vector field, by a similar argument,

(29)
$$\int W \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{4} \int (V^{*_{k}l} T_{kl} + V^{*_{k}5} T_{k5} - V^{*_{4k}} T_{4k} - V^{*_{45}} T_{45}) \, \mathrm{d}\tau + \mathrm{e.\,e.} \,,$$

$$(k, l = 1, 2, 3 \text{ in cyclic order),}$$

$$= \frac{1}{4kc} \int \left(V^{*_{4k}} \frac{\partial T_{5k}}{\partial t} - \frac{\partial V^{*_{4k}}}{\partial t} T_{5k} \right) \mathrm{d}\tau + \mathrm{e.\,e.} \,.$$

For the pseudovector field,

$$\begin{split} \int \! W \, \mathrm{d}\tau &= \frac{1}{4} \int \left(V^{*_{k}l_{5}} T_{_{k}l_{5}} + V^{*_{1}23} T_{_{123}} - V^{*_{1k}l} T_{_{4k}l} - V^{*_{4k}5} T_{_{4k5}} \right) \mathrm{d}\tau + \mathrm{e.\,e.} \,, \\ &= \frac{1}{4kc} \int \! \left(V^{*_{.k}l} \, \frac{\partial T_{_{5k}l}}{\partial t} - \frac{\partial V^{*_{4k}l}}{\partial t} \, T_{_{5k}l} \right) \mathrm{d}\tau + \mathrm{e.\,e.} \,. \end{split}$$

For the pseudoscalar field,

$$\begin{split} \int W \, \mathrm{d}\tau &= \frac{1}{4} \int \left(V^{*_{5123}} T_{_{5123}} - V^{*_{4123}} T_{_{4123}} - V^{*_{kl45}} T_{_{kl45}} \right) \mathrm{d}\tau + \mathrm{c. \, c. \, ,} \\ &= \frac{1}{4ke} \int \! \left(V^{*_{4123}} \frac{\partial T_{_{5123}}}{\partial t} - \frac{\partial V^{*_{4123}}}{\partial t} T_{_{5123}} \right) \mathrm{d}\tau + \mathrm{c. \, c. \, .} \end{split}$$

There is a noticeable similarity in these expressions and in all cases, if the field quantities are regarded as being constant in time, as is usual in this field of investigation at present, then the total integrated energy is zero. Energy may be divided between the field and the particle in different ways but if the nucleon gains energy it does so at the expense of the energy of the field and vice versa.

With the help of the third set of field equations, represented by equation (8), the total energy may be divided in the following way. For the scalar field for instance, making use of the equation conjugate to (11),

(32)
$$W = \frac{1}{2} (T_k^* T_k - T_4^* T_4 + T_5^* T_5) - \frac{1}{4} (S^{*k} T_k - S^{*4} T_4 + S^{*5} T_5 + c. c.).$$

The first bracket contains only the field quantities T and this term may be said to represent the energy density of the field. The second bracket contains products of field quantities and something analogous to a polarization and represents an energy density which is due to the interaction of the field and the nucleon.

The field quantities T, V and S are all five-dimensional tensors of various ranks. These have their counterparts in the four-dimensional world; the vector T_{μ} is represented, for instance, by a four-dimensional vector t_m and a scalar t. Details of the relations between the various types of five-dimensional tensor and their four-dimensional counterparts are given in an earlier paper by FLINT (6). For the nuclear field, since the electromagnetic and gravitational fields are to be neglected at present, the relations are particularly simple. In all cases the corresponding small letter will be used to denote the four-dimensional quantity and a dot will indicate the scalar character of a fifth component.

In terms of four-dimensional quantities the interaction energy densities of equations (28)-(31) are as follows:

Scalar field,

$$-\frac{1}{4}(s_k^*t_k-s_4^*t_4+s_*^*t_*+c.c.).$$

Vector field,

$$(34) - \frac{1}{4} (s_{kl}^* t_{kl} - s_{4k}^* t_{4k} + s_{k}^* t_{k} - s_{4}^* t_{4} + c. c.).$$

Pseudovector field,

$$(35) -1/_{4} (*_{kl}, t_{kl}, -s_{4k}, t_{4k}, +s_{123}, t_{123}, -s_{4k}, t_{4k}, + c. c.).$$

⁽⁶⁾ H. T. FLINT: Phil. Mag., (7), 29, 417 (1940).

Pseudoscalar field,

$$(36) - \frac{1}{4} (s_{123}^* \cdot t_{123} \cdot - s_{4123}^* t_{4123} - s_{4kl}^* \cdot t_{4kl} \cdot + c. c.).$$

The Interaction Energy.

The four-dimensional counterparts of the matrices γ^{μ} of equation (1) are $\beta^m = \gamma^m$ and $\beta_* = \gamma_5$. Putting $\alpha_k = -i\beta_4\beta_k$, (k=1,2,3), and $\beta = -i\beta_4\beta_*$, the Dirac equation (2) for the free nucleon has its usual form and the energy operator

$$W\!=-\left(\!rac{h}{2\pi i}\!
ight)\!rac{\eth}{\eth t}\!=-\left(\!rac{h}{2\pi i}\!
ight)\!clpha_{\!\scriptscriptstyle k}rac{\eth}{\eth x^{\!\scriptscriptstyle k}}\!-M_{\scriptscriptstyle 0}c^2eta$$
 .

In the presence of the nuclear field there are additional terms in the fundamental equation (1) and hence terms of the form $-(\hbar c/2\pi)\beta_4\gamma^\mu H_\mu$ are added to the energy operator.

These terms represent additional energy density of the amount

$$-\psi^{+}\theta(he/2\pi)\beta_{4}\gamma^{\mu}H_{\mu}\psi,$$

the factor θ being introduced to preserve the correct invariance.

For the scalar part of the field $\theta = 1$ and in terms of four-dimensional quantities this energy density becomes

(38)
$$-g_1(hci/2\pi)(\psi^{+}\alpha_k\psi t_k - \psi^{+}\psi it_4 + \psi^{+}\beta\psi t_*).$$

For the vector part of the field it is necessary to put $\theta=\beta$. Then the interaction terms are

(39)
$$-g_2(he/2\pi)(i\psi^+\alpha_k\psi t_k. + \psi^+\psi t_4. - \psi^+i\beta\alpha_k\alpha_l\psi t_{kl} - i\psi^+i\beta\alpha_k\psi t_{4k}),$$

$$(k, l \text{ in cyclic order}).$$

For the pseudovector term $\theta = 1$ and the interaction terms are

$$(40) \quad -g_{\rm 3}(he/2\pi)(\psi^{+}i\beta\alpha_{\rm k}\alpha_{\rm l}\psi t_{\rm kl}, \\ +i\psi^{+}i\beta\alpha_{\rm k}\psi t_{\rm 4k}, \\ +\psi^{+}i\alpha_{\rm 1}\alpha_{\rm 2}\alpha_{\rm 3}\psi t_{\rm 123} -i\psi^{+}i\alpha_{\rm k}\alpha_{\rm l}\psi t_{\rm 4kl}).$$

For the pseudoscalar term $\theta = \beta$, and the interaction terms are

(41)
$$= g_4(hc/2\pi)(\psi^+i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi t_{123}. + \psi^+\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi t_{4123} - i\psi^+i\alpha_k\alpha_l\psi t_{4kl}.) .$$

In order that real values may be obtained, a complex conjugate expression must be added in each case.

It is noticeable that all the terms in these expressions (38) to (41) are in the form of scalar products of field tensors and all the various tensor quantities such as $\psi^+\alpha_{\scriptscriptstyle R}\psi$ usually associated with the nucleon. Terms of this form are frequently introduced into the Lagrangian function to represent the interaction; in the present theory they occur quite naturally.

A comparison with the alternative expressions (33) to (36) for the interaction energy density identifies the various polarization tensors associated with the nuclear field, as follows:

Scalar,

(42)
$$\begin{cases} s_k = -g_1^*(hci/\pi)\psi^+\alpha_k\psi , & s_4 = g_1^*(hc/\pi)\psi^+\psi , \\ s_* = -g_1^*(hci/\pi)\psi^+\beta\psi . \end{cases}$$

Vector.

(43)
$$\begin{cases} s_{k1} = -g_2 * (hei/\pi) \psi^+ i \beta \alpha_k \alpha_i \psi , & s_{4k} = g_2 * (hei/\pi) \psi^+ i \beta \alpha_k \psi , \\ s_{k*} = -g_2 * (hei/\pi) \psi^+ \alpha_k \psi , & s_{4*} = g_2 * (he/\pi) \psi^+ \psi . \end{cases}$$

Pseudovector.

(44)
$$\begin{cases} s_{kl} = g_3 * (hc/\pi) \psi^+ i \beta \alpha_k \alpha_l \psi , & s_{4k} = -g_3 * (hci/\pi) \psi^+ i \beta \alpha_k \psi , \\ s_{4kl} = g_3 * (hci/\pi) \psi^+ i \alpha_k \alpha_l \psi , & s_{123} = g_3 * (hc/\pi) \psi^+ i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi . \end{cases}$$

Pseudoscalar.

Pseudoscalar,
$$\begin{cases} s_{4kl} = g_4^*(hei/\pi)\psi^+ i\alpha_k \alpha_l \psi , & s_{123} = g_4^*(he/\pi)\psi^+ i\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi , \\ s_{1234} = -g_4^*(he/\pi)\psi^+ \beta \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi . \end{cases}$$

These polarizations may be regarded as sources of the meson field. Then for any given distribution of nucleons the field quantities may be calculated and the interaction energy found.

The problem is simplified if the calculation is limited to the static case since it can be shown that, for any particle obeying Dirac's equation, the components ψ_1 , ψ_2 of the wave function are zero when the particle is at rest while the other components ψ_3 and ψ_4 remain finite. It follows that the quantities $\psi^+\alpha_k\psi$, $\psi^+i\beta\alpha_k\psi$, $\psi^+i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi$ and $\psi^+\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3\psi$ are all zero while $\psi^+\beta\psi$ has the same value as $-\psi^+\psi$ and $\psi^+i\beta\alpha_k\alpha_i\psi$ the same value as $-\psi^+i\alpha_k\alpha_i\psi$.

The interaction with the scalar field. – Under these conditions, from the field equations

$$\nabla^2 t = k^2 t = -k^2 s.$$

This determines the scalar t., from which the other field quantities may be derived, in terms of the polarization

$$s_* = g_1 * (hci/\pi) \psi^+ \psi$$
.

Let it be supposed that one nucleon, situated at a point $\bar{r} = \bar{r}_i$, gives rise to the meson field. The distribution of the polarization density s, of the nucleon is that of the quantity $\psi^+\psi$ associated with it and this will be vanishingly small except at the point occupied by the nucleon. This may be represented by the inclusion of Dirac's δ -function so that

$$s_{\cdot}(r) = g_1 * (hci/\pi) \psi^{+i}(r) \psi^{i}(r) \delta(r - r_i)$$

and hence, from equation (46)

$$t_{\bullet}(r) = \int \{k^2 s_{\bullet}(r_a) \exp{[-k(\overline{r}-\overline{r}_a)/4\pi(\overline{r}-\overline{r}_a)]} \; \mathrm{d}\tau_a = g_1 * k^2 (hei/\pi) (\psi^+\psi)^i \varPhi(\overline{r}-\overline{r}_i),$$

where

$$\varPhi(\overline{r}-\overline{r}_i)=\exp\left[-k(\overline{r}-\overline{r}_i)/4\pi(\overline{r}-\overline{r}_i)\right].$$

The potential function of the scalar meson field of the nucleon is thus similar to that of the Coulomb field but falls off more rapidly with distance on account of the exponential factor. The constant g_1*ihck^2/π is the so called a meson charge ».

Now let there be a second nucleon at the point $\bar{r}=\bar{r}_k$ in this field.

The total interaction energy is

$$\frac{1}{4}\int (s.^*t. + s.t.^*) \,\mathrm{d}\tau,$$

the other terms of the expression (33) vanishing under the present conditions, and this becomes

(47)
$$\frac{1}{2} |g_1|^2 (hck/\pi)^2 (\psi^+ \psi)^i (\psi^+ \psi)^k \varPhi(\bar{r}_i - \bar{r}_k) .$$

The interaction with the vector field. – In this case the non-vanishing polarizations are s_4 and $s_{kl}=g_2*(hc/\pi)\psi^+i\alpha_k\alpha_l\psi=g_2*(hc/\pi)\psi^+\sigma\psi$, where $\sigma_1==i\alpha_2\alpha_3$, etc.

From the field equations

$$(\nabla^2 - k^2)t_k = ik \text{ curl } s_{kt}$$

and

$$(\nabla^2 - k^2)t_4 = -k^2s_4$$
.

The energy of interaction of the two nucleons

(48)
$$= \frac{1}{4} \int (s_{kl}^* t_{kl} - s_4^* \cdot t_4 \cdot + c. c.) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int ((i/k) s_{kl}^* \text{ curl } t_k \cdot - s_4^* \cdot t_4 \cdot + c. c.) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} |g_2|^2 (hck/\pi)^2 \left\{ (\psi^+ \psi)^i (\psi^+ \psi)^k - [(\psi^+ \sigma \psi)^i \cdot (\psi^+ \sigma \psi)^k] -$$

$$- (1/k^2) [(\psi^+ \sigma \psi)^i \cdot \text{grad}_i] [(\psi^+ \sigma \psi)^k \cdot \text{grad}_i] \right\} \varPhi(\bar{r}_i - \bar{r}_k) ,$$

upon substitution and integration.

 $\label{eq:the_continuous} \textit{The interaction with the pseudovector field.} - \text{The non-vanishing polarizations}$ are

$$s_{kl} = -g_3*(hc/\pi)\psi^+\sigma\psi$$
,

and

$$s_{4kl} = g_3 * (hci/\pi) \psi^+ \sigma \psi$$
.

From the field equations

$$(\nabla^2 - k^2)v_{4kl} = k^2 s_{4kl} - \text{grad div } s_{4kl}$$
,

and

$$(\nabla^2 - k^2)t_{123} = ik \text{ div } s_{kl}.$$

The energy of interaction

(49)
$$= \frac{1}{4} \int (s_{kl}^*, t_{kl} - s_{4kl}^* t_{4kl} + c. c.) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int [s_{kl}^*, (i/k) \operatorname{grad} t_{123} + s_{kl}.) - s_{4kl}^* (v_{4kl} + s_{4kl}) + c. c.] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} |g_3|^2 (hc/\pi)^2 (\psi^+ \sigma \psi)^i (\psi^+ \sigma \psi)^k \varPhi(\overline{r}_i - \overline{r}_k) ,$$

upon integration.

The interaction with the pseudoscalar field. – One polarization term remains i.e. $s_{4kl*} = g_4*(hci/\pi)\psi^+\sigma\psi$.

From the field equations

$$(\nabla^2 - k^2)v_{1234} = -ik \text{ div } s_{4kt}.$$

Hence the energy of interaction

(50)
$$= \frac{1}{4} \int (s_{4kl}^* \cdot t_{4kl} + c. c.) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left[s_{4kl}^* \cdot ((-i/k)v_{1234} + s_{4kl}) + c. c. \right] d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} |g_4|^2 (hc/\pi)^2 [(\psi^+ \sigma \psi)^i \cdot \operatorname{grad}_i] [(\psi^+ \sigma \psi)^k \cdot \operatorname{grad}_k] \Phi(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \cdot$$

The expressions (47) to (50) for the interaction energy of two nucleons due to the various types of field are of the generally accepted form. The pseudovector interaction appears slightly different only on account of the vanishing of the coefficient of a term containing

$$[(\psi^+ \dot{\sigma} \psi)^i \cdot \operatorname{grad}_i] [(\psi^+ \sigma \psi)^k \cdot \operatorname{grad}_k] \varPhi(\overline{r}_i - \overline{r}_k) \;.$$

The usual difficulty then arises here, that of the non-central terms which become infinitely great as $(\bar{r}_i = \bar{r}_k)$ becomes very small. But since it has been shown that for all types of field the total energy is finite, any infinity occurring in the interaction energy is balanced by a corresponding infinite term in the field energy. This does suggest that when a method of «cutting-off» is used to avoid infinities, nothing essential is removed for the total energy may be divided at will into any two convenient parts. When the field and the particle are considered as a single system there is no difficulty (*).

^(*) It is interesting to consider in this connection some work by Professor Jordan in the field of cosmólogy of which a short report was given in *Nature*, **164**, 637 (1949).

It is well-known that a «red shift» occurs in the spectrum of a spiral nebula which is proportional to the distance of the nebula, and this may be interpreted as a Doppler effect denoting a general expansion of space. In order to account for the fact that the mean density of mass throughout the universe remains sensibly constant a number of cosmologists have postulated a continual creation of matter. Jordan suggests a means of reconciling this creation of matter with the principle of conservation of energy.

It can be shown empirically that

I should like to express my gratitude to Professor Flint for his help and interest throughout.

where G is the Newtonian constant of gravitation, M the total mass and R the radius of the observable universe.

But this may be written in the form

$$GM^2/R \simeq Mc^2$$
,

which suggests that "the negative potential energy of gravitation for the whole universe is equal to the sum of the rest energies of the masses of the stars".

Thus it seems possible that the total energy of the universe is, and remains, zero and that the creation of mass takes place at the expense of the energy of the gravitational field. JORDAN supposes further that this holds, not only for the universe as a whole, but also for a finite region in which creation of matter takes place.

The five-dimensional theory of the nuclear field leads to a similar conclusion in so far as the total energy of the nuclear system is zero. It is not, however, suggested that there is anything more than a formal resemblance between these theories.

RIASSUNTO (*)

I vari tipi di campi nucleari si possono descrivere, in uno spazio a cinque dimensioni, per mezzo di tensori d'un ordine appropriato che soddisfino le equazioni del campo, la forma delle quali è suggerita dalla teoria elettromagnetica. La notazione a cinque dimensioni suggerisce l'adozione di un tensore dell'energia generalizzato, consistente, come si trova, di termini normalmente introdotti separatamente come energia del campo ed energia d'interazione, rispettivamente. Dalle equazioni del campo nucleare risulta allora che l'energia totale è finita. Un'altra espressione per l'energia d'interazione si ottiene dall'equazione fondamentale del nucleone in presenza del campo nucleare, che contiene i tensori del campo indicanti la presenza di una quantità addizionale di energia. Il confronto di questa espressione con quella parte dell'energia totale considerata come energia d'interazione identifica i tensori di polarizzazione associati al nucleone. Si calcolano energie di interazione per il problema dei due nucleoni che risultano del tipo comunemente ammesso per tali energie, salva, tuttavia, la nuova ipotesi, che i termini infiniti che entrano nell'espressione siano compensati da termini corrispondenti nell'energia del campo. Per quanto ciò sia già stato fatto rilevare in un caso semplice, il presente lavoro mostra come questa proprietà sia comune a tutti i tipi di campo nucleare. I risultati si esprimono alla fine nell'usuale notazione quadridimensionale ma il procedimento in cinque dimensioni rende coerente la trattazione del problema, come Klein lo ha dimostrato per altre branche della fisica.

^(*) Traduzione a cura della Redazione.

On the Growth of a Cosmic Ray Initiated Jet in a Nucleus.

F. C. ROESLER and C. B. A. McCusker Dublin Institute for Advanced Studies

(ricevuto il 1º Dicembre 1952)

Summary. — The cascade in the nucleus is investigated with a view to the interpretation of extreme energy stars from heavy nuclei. It is assumed that a clean tunnel is punched through the nucleus and that the cross section of this tunnel determines the supply of collision partners for the cascade. The tunnel shows a trumpet-like spread but is nearly cylindrically shaped at the highest energies. The spread of the cascade is treated with a diffusion equation of the Fokker-Planck type, considering the second moments. The mass-development is treated by introducing an indetermined function which can be chosen to represent multiple, plural or mixed theories of meson production. The present observational evidence is discussed and shown not yet to decide the choice; experiments which offer no new or special difficulties would probably fix it.

1. - Introduction.

In the study of the elemantary particles physicists have been examining events at ever higher energies in the perrenial hope that the next order of magnitude may bring understanding. Lately, «very energetic» has come to mean $10^{13} \dots 10^{14}$ eV per nucleon. The data which painstaking experimental work has now secured for this domain (Daniels et al. (1); Kaplon and Rit-SON (2); LAL et al. (3)) consist for the most part of records of stars produced by the break-up of large nuclei. In order to reveal any information relevant

⁽¹⁾ R. R. DANIELS, J. H. DAVIES, J. H. MULVEY and D. H. PERKINS: Phil. Mag. 43, 753 (1952).

⁽²⁾ M. F. KAPLON and D. M. RITSON: Phys. Rev., 88, 386 (1952).

⁽³⁾ O. Lal, Yash Pal, B. Peters and M. S. Swami: Phys. Rev., 87, 545 (1952).

to elementary particle physics and latent in the records of such stars the complications due to the large number of particles in the target nuclei must be overcome. This calls for some kind of cascade theory, since the average number of collisions suffered by a fast nucleon passing through a heavy nucleus is considerably larger than one. If we denote by σ the geometrical cross section of nucleons at high energies, by M the nucleon mass and by ϱ the density of matter inside a nucleus the mean interaction length of a fast nucleon inside a nucleus will be $L=M/(\varrho\sigma)$. This L is one order of magnitude smaller than the diameter of a heavy nucleus.

As a number of authors have pointed out (Heitler and Jánossy (4); Therraux (5); Haber-Schaim (6)) the theory of this internuclear cascade is faced with difficulties which come from the small mean scattering angle, the short mean interaction length and the given, finite density of collision partners in the target. At high energies, the mean scattering angle $\overline{\Phi} \ll 1$. The number of particles n going out from a given collision is ≥ 2 . One finds $(L\Phi^2) \ll n\sigma$. This means that the particles taking part in or originating from one given collision do not, before their next interactions with particles in the target, separate sufficiently to have individual collision partners and therefore they do not give rise to independent branches of the cascade. The problem of the cascade inside the nucleus is for this reason fundamentally different from that of the electron-photon-cascade in the atmosphere of the earth and cannot be treated by just adapting the equations worked out for the latter.

Numerous particles of the cascade pass through the target-nucleus along essentially the same path. Qualitatively, one should expect from this that the growth of the spread will be slower than if every particle would encounter a separate collision partner, and that secondly the matter of the target nucleus will be cleared away completely from the path of the cascade. One should picture the cascade as a dense stream punching a clean hole through the nucleus. The term «jet» which has been introduced by the Bristol Group for the narrow cone of shower particles coming out of the target is therefore quite appropriate from the viewpoint of the dynamics of the process of penetration.

We base our approximate theory of the growth of such a jet on the hypothesis of the clean penetration tunnel, the cross section of which determines the supply of target-matter for collisions. Throughout the paper classical, relativistic mechanics coupled with assumptions about cross sections and probabilities is used. The justification for this short cut is that the wavelength associated with the high particle-momenta in question is very short

⁽⁴⁾ W. HEITLER and L. JÁNOSSY: Proc. Phys. Soc., A 62, 364, 669 (1950).

⁽⁵⁾ C. Therraux: Helv. Phys. Acta, 24, 551 (1951).

⁽⁶⁾ U. HABER-SCHAIM: Phys. Rev., 84, 1199 (1951).

compared to the lateral dimensions of the beam and of the scattering particles, so that there will be no interference between waves travelling through the regions corresponding to different classical paths.

2. - The laws of the dense cascade.

Definitions (cf. Fig. 1): We introduce a righthanded rectangular coordinate system with axes s, x, y. The s-axis is the axis of symmetry of the jet and

of the widening penetration tunnel. x(s) is the distance in x-direction of the boundary of the jet from the axis. m(s) is the proper mass (rest mass) of the jet as a whole. x(s) and m(s) are variables referring to the jet as if it were of continuous matter. Particle-variables are $\xi(s)$ and $\eta(s)$, the x- and y-coordinates of the particle under consideration, and $\Phi(s)$, the angle of the particle path with the s-axis.

Obviously the sharp boundary of the tunnel is a convenient fiction. The assumption that the jet is homogeneous across the tunnel is also an idealization of the real lateral structure.

We connect the continuous jet variables and the particle-variables by putting

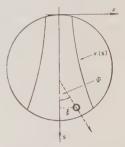


Fig. 1.—Schematic picture of the nucleus and penetration tunnel giving an explanation of the variables.

$$(1) x^2(s) = \alpha \xi^2(s) .$$

The factor α should be a function of the number of particles in the jet, slowly increasing as this grows. We will neglect the increase and take α constant and equal to 2; from simple probability arguments this is a reasonable choice if the number of particles in the cascade is between 20 and 40. In the applications made in the present paper the choice of α has no influence. (Compare with remarks following (32)).

As collisions of the jet with target-matter occur the averages (7) $\overline{\Phi}^{2}$, $\overline{\Phi}^{1}$, ..., $\underline{\Phi}^{2n}$ will increase. All these moments should be known for the complete $\underline{\Phi}$ -statistics, but we will deal with $\overline{\Phi}^{2}(s)$ only. Consider a collision between what is at a certain stage the total cascade and one nucleon of the target. It seems reasonable to group the whole of the jet together as one of the colliding entities since all the particles in it move down the nucleus with very small longitudinal

⁽⁷⁾ All our averages imply a double summation. They refer to the grand total of particles of an ensemble of jets.

separation. One must expect that the collision will result in a very complicated play of interactions between the particles in the jet and the new nucleon. Undoubtedly $\overline{\Phi}^{2}$ will increase. We suggest the hypothesis:

(2)
$$\Lambda \overline{\Phi}^2 = a(1/\gamma)^2.$$

Here a is a factor of order of magnitude 1; for convenience (§) we shall put it equal to 1. Further $\gamma=1/(1-\beta^2)^{1/2}$ and $\beta \cdot c$ is the velocity of the centre of mass system (c.m.s.) of the collision with respect to the laboratory. The equation (2) corresponds to the assumption that the distribution of particle-velocities is, roughly at least, isotropic in the c.m.s. after the collision. It seems to the authors that (2) is the only simple and general assumption possible at the present state of knowledge. If the angular distribution resulting from a single nucleon-nucleon collision is not very strongly « peaked » (e.g. if it is the one derived by Fermi (§)) isotropy does not seem too crude an assumption for the whole jet, considering the complicated character of the collision.

From the relativistic transformation laws

$$\beta = \frac{\Gamma B}{\Gamma + M/m},$$

where $B \cdot c$ is the velocity of the jet in the laboratory frame, $\Gamma = 1/(1 - B^2)^{1/2}$ and M is the nucleon mass. From (3) one gets the approximate relation

$$\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma m \\ 2M \end{pmatrix}^{1/2}.$$

which is more useful for our purposes. (It holds if both $\Gamma\gg M/m$ and $\Gamma\gg m/2\,M$ which is true from the physical conditions). We can now write the hypothesis (2)

$$\Delta \overline{\Phi^2} = \frac{2M}{\Gamma m}.$$

 $^{(8)}$ If, after the collision, the distribution is isotropic in the c.m.s. and the energy of every particle $\mu\text{-times}$ the rest energy then

$$a = 2 \frac{\mu \ln(\sqrt{\mu^2 - 1} + \mu) - \sqrt{\mu^2 - 1}}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

For $\mu=1+\delta$, $a\approx 4\delta/3$. For $\mu\gg 1$, $a\approx 2\ln 0.74~\mu$. Any estimate of μ depends on the theory of meson production one adopts and is rather uncertain.

(9) E. FERMI: Phys. Rev., 81, 683 (1951).

If only a portion of the particles in the jet are affected by the collision with the new nucleon and isotropy is assumed for this portion only (in the corresponding c.m.s.) one gets for their $\Lambda^*\overline{\Phi^2}$ a formula like (5) with the mass of the portion m^* for m and the corresponding Γ^* for Γ . For the particles making up the remainder $m-m^*$ one would have $\Delta\Phi=0$. Now if the portion m^* is selected at random $\Gamma^*\approx\Gamma$: forming the mean square for all the particles in m one finds (5) valid again. This argument may strengthen the belief in the hypothesis (2) expressed by (5).

While the cascade progresses the distance Δs down the target it will encounter all the nucleons present in the volume of the penetration tunnel $(\pi/4)x^2\Delta s$. That is, it encounters a total mass $\varrho(\pi/4)x^2\Delta s$, ϱ denoting the density of matter inside a nucleus. Every nucleon in this mass added to the cascade gives a $A\overline{\Phi}^2$ according to (5). We may now define a ϱ diffusion coefficient s for the angle Φ in complete analogy with the case of Brownian movement.

(6)
$$2D_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} = \frac{\varDelta \overline{\Phi^2}}{2 \varDelta s}.$$

Using (5), the expression for the mass in the tunnel and the approximate relation for high energies $\Gamma = E'/mc^2$ one finds

(7)
$$D = k\xi^2 = (\pi/8)a\varrho c^2 \xi^2 / E'.$$

E' is the total energy of the jet in the laboratory frame and may be put equal to the primary energy.

It is illuminating to compare the diffusion coefficient (7) with the angular diffusion coefficient of the electron-photon-cascade, which we may write, to bring out the essential factors,

$$D_e = K n_e \sigma_e / {E'}^2 .$$

Here K is a constant, $n_e\sigma_e$ the number of electrons multiplied by their cross section, E' the primary energy. The different power of the energy in (7) and (8) comes from the scattering laws. For relativistic Coulomb scattering the mean square of the angle is proportional to E'^{-2} while isotropic relativistic scattering makes $\overline{\Phi^2} \sim E'^{-1}$. In (8) we have the factor $n_e\sigma_e$ which must be compared with $z\xi^2$ in (7). The latter increases only slowly with the number of particles in the jet n and is small compared to $n\sigma$. This is so because of the high density of the cascade in the nucleus. Bringing in the factor $z\xi^2$ instead of z0 instead of z1 in the essential point in our theory. We could do this only by making rather crude approximations, but one should bear in mind that while

these approximations may result in errors of say -50% the ratio $n\sigma/\alpha\xi^2$ may well be $5\,000\%$.

The increase in the proper mass of the jet as it progresses is made up of that part of the mass of the target nucleus which is added to it and of the particles created in the collisions. One may formally write for the total increase

(9)
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} = \frac{\pi}{4} f \varrho x^2 = \frac{\pi}{4} f \varrho \alpha \xi^2 .$$

f is a function of the number of interactions and the energy dissipated in the jet at each step. Its form may be chosen to represent approximately either a plural or a multiple theory of meson production.

3. - The evolution of the dense cascade.

We will denote the projections of Φ on the s-x-plane and on the s-y-plane by Φ_x , Φ_y . The connection of Φ_x with ξ is, that for the element of path of a particle $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s$ Φ_x (if $\Phi < 1$). Thus Φ_x is the «velocity» of a movement along «distances» ξ with respect to the «time» s. A connection of the same type exists between Φ_y and η_x . In these terms the analogy of the present problem with the theory of two-dimensional Brownian movement is evident. The joint probability density function for Φ_x , Φ_y , ξ , η must obey an equation of the Fokker-Planek type. This equation is

(10)
$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\Phi_x \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \Phi_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + D \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi_x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Phi_y^2} \right),$$

where ψ is the probability density in $\Phi_{\tau}\Phi_{\eta}\xi\eta$ -space and D is the quantity defined by (6), (7). The meaning of (10) may be vizualized by considering the flow of probability into and out of an element $\mathrm{d}\Phi_{\tau}\mathrm{d}\Phi_{\eta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\mathrm{d}\tau$ of the phase space. In fact (10) can be derived from this consideration (19).

The mean value of a function g of Φ_x , Φ_y , ξ and η with respect to a distribution ψ is defined by

$$\overline{g} = \int g \psi \, \mathrm{d}\tau.$$

⁽¹⁰⁾ Such a derivation is contained in the treatment of multiple scattering by Rossi and Greisen (11), p. 266 f.

From this

(12)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,g = \int g\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\,\mathrm{d}\tau.$$

Introducing for $\delta \psi_i \delta s$ the right side of (10) one can derive relations between mean values. Assuming an initial distribution ψ which vanishes strongly at infinity in phase space and using this property in performing partial integrations one obtains the following theorems:

(13)
$$\frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}s} = 2\Phi_z \xi \;,$$

(14)
$$\frac{\mathrm{d}\Phi_x\xi}{\mathrm{d}s} = \overline{\Phi}^2\,,$$

(15)
$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{Q}_{x}^{2}}}{\mathrm{d}s} = 2D.$$

From these follows

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^2}{\mathrm{d} s^2} = 2 \boldsymbol{\Phi}_x^2 \,,$$

(17)
$$\frac{\mathrm{d}^3 \xi^2}{\mathrm{d} s^3} = 4D \; .$$

We have now eliminated the Φ ,-moments. Integrating (17) we will obtain the dependence of the mean square lateral spread ξ^2 upon s, and thus the solution of our physical problem.

It may be remarked here that the above treatment of the lateral spread of a cascade is formally general, e.g. it applies to the electron-photon-cascade if the corresponding D is used. Nordheim's (11) method evolved for this, gives the lateral spread in the form of an integral over the whole past of the system

(18)
$$\xi^{2}(t) = \int_{0}^{t} 2D(s)(t-s) \, \mathrm{d}s \,,$$

t being the final value (upper limit of integration) of the variable s. By

(11) B. Rossi and K. Greisen: Rev. Mod. Phys., 13, 240 (1941).

differentiating (18) thrice with respect to t one is led back to (17) and proves the equivalence of the two methods. The difference lies in that Nordheim's reasoning is in terms of a non-Markoff-process, which is here avoided by the explicit introduction of the additional variable Φ_x : The time dependent statistics of the variables ξ and Φ_x together constitute a Markoff-process, namely the one governed by the Fokker-Planck equation.

The final equation (17) is integrated using (7) by putting

(19)
$$\xi^{2}(s) = C_{1} \exp \left[\lambda_{1} s\right] + C_{2} \exp \left[\lambda_{2} s\right] + C_{3} \exp \left[\lambda_{3} s\right].$$

The initial conditions are, from the physical picture, $\xi^2(0) = \xi_0^2$ and $\Phi^2(0) = 0$ from which

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \, \overline{\xi^{\mathrm{z}}}(0) = 0 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}s^{\mathrm{z}}} \, \dot{\xi}^{\mathrm{z}} = 0 \;.$$

The characteristic equation is

$$\lambda^3 = 4k ,$$

with the roots

(21)
$$\begin{cases} \lambda_1 = (1k)^{1/3}, \\ \lambda_2 = (4k)^{1/3}(-\frac{1}{2}, i/2 \cdot \sqrt{3}), \\ \lambda_3 = (4k)^{1/3}(-\frac{1}{2}, i/2 \cdot \sqrt{3}). \end{cases}$$

From the initial conditions one determines

(22)
$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \cdot \xi_0^2 \\ C_2 = \frac{2}{3} \cdot \xi_0^2 \end{cases}, \\ C_3 = 0 .$$

Putting $\lceil (4k)^{1/3} \rceil = \lambda$ the solution for $\xi^2(s)$ reads

(23)
$$\xi^2(s) = \xi_0^2[(1/3) \exp [\lambda s] + (2/3) \exp [-\lambda s/2] \cos (\sqrt{3}\lambda s/2)]$$

Differentiating this twice one finds, according to (16) the solution for $\Phi_x^i(s)$:

(24)
$$\overline{\Psi_z^2}(s) = (1/6)\xi_0^2\lambda^2 \cdot \left[\exp\left[\lambda s\right] + \exp\left[-\lambda s/2\right]\left[\sqrt{3}\cdot\sin\left(\sqrt{3}\lambda s/2\right) - \cos\left(\sqrt{3}\lambda s/2\right)\right]\right].$$

If we make for the moment the assumption that f is a constant and introduce (23) into (9) this can be integrated. The solution for m(s) obtained is

(25)
$$m(s) = m_0 + \frac{\pi f \varrho \alpha \overline{\xi_0^2}}{12\lambda} \left[\exp\left[\lambda s\right] + \exp\left[-\lambda s/2\right] \left\{ \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3} \lambda s}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3} \lambda s}{2}\right) \right\} \right].$$

We shall discuss later under what physical assumptions f may be constant. In working out the solution (23) for $\bar{\xi}^2(s)$ numerically one finds that there is a large domain of values of the argument λs within which the difference $\bar{\xi}^2(s) - \bar{\xi}^2(s)$ is quite small. Thus for $\lambda s = 0.50$, $\bar{\xi}^2(s)$ exceeds $\bar{\xi}^2_0$ only by 2%. For $\lambda s = 0.70$ the excess reaches 5% and for $\lambda s = 0.80$ it reaches 10%. Beyond $\lambda s = 1$ the increase of $\bar{\xi}^2(s)$ is rather quick. It so happens, however, that in the applications of greatest interest, that is for the highest energies, λs never reaches values that make $\bar{\xi}^2(s)$ deviate significantly from $\bar{\xi}^2_0$. (The maximum value of s is the diameter of the target nucleus. λ decreases with increasing energy. For numerical values of λs see section 4). It is therefore of interest to investigate the limiting form of the solutions obtained in the case of a negligible increase in $\bar{\xi}^2$. These limiting forms, valid for $\lambda \leq 0.70$ (allowing 5% error) are

(26)
$$\xi^2(s) = \xi_0^2 = \text{constant} ,$$

and

(27)
$$\overline{\Phi}_x^2(s) = \frac{\xi_0^2 \lambda^3 s}{2} = 2D_0 s.$$

with

$$(28) D_0 = k\xi_0^2.$$

Furthermore

(29)
$$m(s) + m_0 + (\pi/4) f \varrho \alpha \xi_0^2 s$$
.

From the physical meaning of (29) the integration constants m_0 and $\overline{\xi_0}$ must be

(30)
$$m_0 = \text{mass of the primary}$$
,

(which in most cases is 1 nucleon mass) and

(31)
$$(\pi/4)\alpha \xi_0^2 = \sigma_{\text{primary}}.$$

If the primary is a single nucleon one assumes for σ customarily

(32)
$$\sigma = \pi (\hbar/m_{\pi}c)^2 = 6.15 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$$
.

 m_{π} is the pion mass, equal to 276 electron masses, and (h/mc) the tompton wavelength of the pion. It should be noted here that in virtue of (31) α is absorbed in σ . Since it is the latter which is fixed empirically the choice of α is really not of importance in the case of the cylindrical-tunnel-approximation, except for the estimate of its range (cf. (37), (39) below and (7), (20)).

We will now discard the variable Φ_x and reintroduce the whole (unprojected) angle Φ which is required for the applications. Since $\overline{\Phi^2} - 2\overline{\Phi_x^2}$ and using (27) and (31) the approximate solutions for $\overline{\Phi^2}$ and m read:

$$\overline{\Phi}^{2}(s) = 2\sigma \varrho e^{2} s / E'$$

and

$$m(s) = m_0 + \sigma f \varrho s.$$

Note that (34) like (25) and (29) is based on a constant f. Obviously (34) might have been written down without any theory, just from the picture of the penetration tunnel. There is also an obvious interpretation of (33): one could write this down from the assumption that the jet is quasi-isotropic in the c.m.s. of the collision between the primary and the total target matter in the penetration tunnel. The purpose of deriving such simple relations as (33) and (34) from more elaborate ones is to lay bare the assumptions on which they rest and the limits of their validity.

4. - Conditions for comparison with experiment.

Before applying the theory it is necessary to find the actual figures for the limits within which the simple solutions which correspond to a cylindrical penetration tunnel may be used. For a nucleus of atomic weight A the diameter is

$$(35) 2R = 3A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

This fixes the maximum value of s for a given type of target. Any target has the same minimum value of s corresponding to a grazing hit in which only one nucleon is struck. This we denote by $s_1 = M/(\varrho\sigma)$. For s_1 one gets from (33) the relation

(36)
$$\gamma_{p} = 2/\overline{\Phi}^{2} \simeq E_{\rm GeV}^{'}.$$

This has frequently been used for estimating primary energies from $\overline{\varPhi^2}$.

In the experimental papers the angular distribution is usually characterized by giving a value γ_x which is the primary energy in GeV estimated on the basis of an s_1 -impact (nucleon-nucleon collision). (This estimate is sometimes not made from the second moment of Φ but e.g. from arguments about the symmetry of the angular distribution in the c.m.s.). We shall use the value of γ_x as given in the experimental papers to re-calculate a value Φ^2 in accordance with (36). Since we do not assume a simple nucleon-nucleon interaction in all cases we shall not, generally, take $E'_{\text{GeV}} = \gamma_x$ but use (33) to obtain E'.

For the simple solutions to be applicable one must have, if an error of 5% in the final $\overline{\xi^2}$ is permitted,

$$\lambda \cdot 2R \leqslant 0.7.$$

From (7), (20) and (35) and with the numerical value $\varrho=7.06\cdot 10^{37}~M~{\rm cm^{-3}}$ one finds

(38)
$$\lambda \cdot 2\dot{R} = 1.75 \sqrt[3]{A/E'_{\text{GeV}}},$$

so that the condition becomes

$$E_{\rm GeV}^{'} > 16A \; . \label{eq:energy_energy}$$

Thus for a target of Cu with a mean A of about 63 the simple theory may be applied with some confidence above $16.63 \approx 1\,000$ GeV. This limit seems rather high and one might at first think that we must renounce a large part of the empirical «very high energy» data. However, it must be remembered that (39) refers to true primary energies and central hits. The energies given in the experimental papers are based on (36) and are therefore too low if the event is due to a central hit. Our limit (39) can be compared with the limit one might adopt from the experimental evidence. It is a very noticeable feature of the Bristol data that the highest multiplicities occur for low values of γ_{ρ} and large values of N_h i.e. for collisions of primaries of only « moderate » energy with silver or bromine. This suggests that there may be an energy

domain (say around $\gamma_{\rho} = 400$) in which the number of shower particles decreases with increasing primary energy. Such a decrease might fit it in with the contraction of the penetration tunnel which is strongly trumpet shaped for energies much beneath the limit (39). We have not carried out a detailed investigation of such events. Tentatively we take all of the Bristol events with

(40) .
$$2\overline{\Phi^2} = \gamma_p \geqslant 500 \quad \text{« GeV »}$$

as such with a quasi-cylindrical tunnel. The whole of the Kaplon-Ritson data is probably within the range of the simplified equations.

In order to connect the mass of the cascade with n_s , the number of charged shower particles (n_s is the number of minimum ionizing tracks in the emulsion) one should know the average mass m of a shower particle. Furthermore one should know what proportion of the shower particles is uncharged. From the latest results of the Bristol Group it appears that in the high energy events heavy mesons appear with the same or higher frequency than pions. The mass distribution of shower particles given recently by Perkins (12) would lead to the conclusion that roughly

$$\overline{m} \approx (2/3)M.$$

Very little is known about the ratio of uncharged particles. If we assume that one third of all particles are un-charged so that $n \approx (3/2)n_s$ this will compensate for the factor 2/3 n (41) and we get the rough estimate

$$(42) m = n_s M.$$

This conversion rate will be used below.

5. - Interpretation of multiplicities in events with cylindrical tunnel.

The essence of what has gone before is the self-consistency of the picture of the narrow, clean tunnel, from which we had started. We have shown that the cascade theory developed from this basis does indeed, at suitably high energies, give a jet with negligible lateral spread. For such an almost cylindrical jet the investigation of the function f will be easier than otherwise.

In order to see if our approach in terms of mean values is of any use we shall try whether the observed variations in u_s for a given primary energy

(12) D. H. Perkins: Report of the Copenhagen Conference (June 1952).

can be explained roughly as due to a variation in impact parameter. f may be expected to depend both on the relative energies of the particles in the jet and on their number at any stage. On a plural theory of meson production the dependence upon the number of particles present should predominate whereas on a multiple theory the dependence on energy may be more important. On a plural theory one would definitely expect an increase in f along the tunnel. On a multiple theory the decrease in f due to the degradation of energy may be to some extent offset by the increase due to the increasing number of collisions. On such a theory, therefore, f might well be almost a constant.

We will first assume such a roughly constant f along the tunnel and try to find how f varies with the primary energy. We may now use (34). We take the given γ_s and n_s and compute from (33) and (34) the values of f and E' assuming 1) a central collision (i.e. maximum s) and 2) a glancing collision (i.e. $s=s_1$). These give the upper and lower limits for the function f(E') for the particular event. We plot these two E', f combinations for all the events available as points on a graph. We do not expect that a given energy and a

fixed impact parameter would in nature always result in the same n_s . However, if the chance variations in the production of particles are not large and if therefore an approach in terms of mean values is useful we may expect that the points corresponding to central and glancing collisions respectively will form two separate groups rather than intermingle on the graph. It should then be possible to find a function f = f(E') whose curve should lie between the two groups.

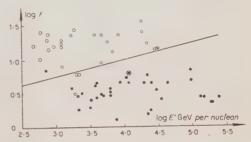


Fig. 2. – Plot of maximum $(\bigcirc = P, N \text{ primary})$ and minimum $(\bullet = P, N \text{ primary})$ $\bullet = \alpha\text{-particle primary}$, $\bullet = \text{Mg}$ primary) values of f against E' as evaluated from observed events. The straight line should give the lower bound of the upper set of points $(= \bigcirc)$. It represents the law $f = 1.0(E'/Me^2)^{1/4}$.

In fig. 2 we have carried out this procedure for all the events described by Kaplon and Ritson (2) and for these described by Daniels *et al.* (1), having a $\gamma_{\nu} \ge 500$. In addition we have used the new very large star with a Magnesium primary described by Lal *et al.* (3). E' and f have been calculated from the data given using for a proton or neutron (P, N) primary:

(43)
$$E'_{\text{GeV}}(2R) = 1.21 A^{1/3} \gamma_{\nu} ,$$

(44)
$$E'_{\text{GeV}}(s_1) = 0.93 \gamma_{\scriptscriptstyle T}$$
,

$$f(2R) = 0.77 A^{-1/3} (n_s - 1) ,$$

$$f(s_1) = n_s - 1.$$

For z-particle primaries we have used, corresponding to the different cross section and mass, and taking as abscissa the energy per nucleon,

(47)
$$(1/4)E'_{\text{GeV}}(2R) = 0.89 A^{1/3}\gamma_p ,$$

$$f(2R) = 0.263 A^{-1/3}(n_s - 4).$$

It is easy to modify these formulae for other primaries e.g. Mg. For all events in the emulsion we have put A = 108 corresponding to the maximum value. For α -particles or heavier primaries s_1 -values have no obvious meaning and were not considered.

It will be seen that the limiting points fall into two distinct groups with the exception of one event (the O $\sim 4p$ star) observed by the Bristol Group. If, contrary to our initial assumption, f is not constant along the tunnel but decreases because of the degradation of energy in the cascade the two groups of points should be separated by an empty domain. This appears to be the case. But the same picture is to be expected if the selection of events is biassed against events with low multiplicity, and this is not unlikely in photographic plate work (13). If one does assume an unbiassed selection of events, the lower boundary of the upper point-set should give the variation of f with E' for events which represent true nucleon-nucleon encounters in glancing collisions. We have fitted to this lower boundary a straight line, corresponding to the law

(49)
$$f = 1.0 \cdot (E'/Me^2)^{1/4} .$$

We may use this law to refine the argument and have f vary slowly along the tunnel. We will assume that f depends on the specific energy at each stage, that is on E'/m. This is also approximately the energy available for dissipation in the cascade as a new nucleon becomes part of it (11). Adopting (49) to give this dependence the equation for the mass-development (9) becomes

(50)
$$\frac{\mathrm{d}n_s}{\mathrm{d}s} = \frac{\sigma\varrho}{M} \left(\frac{E'}{n_s M c^2}\right)^{1/4}.$$

⁽¹³⁾ It is suggestive that the (O + 4p) star was only discovered by the accident of one of the secondaries producing a big star. If, say, the plural production theory of Heitler is correct, a true glancing collision would be very easy to miss.

⁽¹⁴⁾ Such an assumption may be reasonable if there is no definite number of particles while the interactions in the jet take place; if the whole jet should rather be pictured as a mass of «fluid» in violent agitation.

The solution is

(51)
$$n_s = \left(\frac{5}{4} \frac{\sigma \varrho}{M}\right)^{4/5} \left(\frac{E'}{Mc^2}\right)^{1/5} s^{4/5} + n_p ,$$

where n_p is the number of nucleons in the primary i.e. 1 for a P, N-primary (51) is the desired generalization of (34).

We will use (51) to compute a n_s - γ_r -correlation diagram. From (33) and the definition of γ_r (36) one finds the energy in terms of γ_r :

$$(52) E' = \sigma \varrho e^2 s \gamma_p .$$

Introducing this into (51) and regarding γ_p as the variable one finds

(53)
$$n_s - n_p = \left(\frac{5}{4}\right)^{4/5} \frac{\sigma \varrho^8}{M} \gamma_p^{1/5} .$$

The left side of (53) and the argument γ_{τ} on the right side are so related that the function appears as a straight line in a double-logarithmic diagram.

To every value of s corresponds a different such line. The 4 lines corresponding to s = 2R, $s = \overline{s} = R \cdot \sqrt{2}$, s = R, and $s = s_1$, all for Cu $(A \approx 63)$ and for a P, N-primary were drawn in Fig. 3. $s = \overline{s} = R \cdot \sqrt{2}$ is the length of the tunnel axis for the median value of the impact parameter. s = R is the length of the tunnel axis for an impact parameter $\sqrt{3}R/2$, which comprises 3/4 of the target area. From the theory one would expect that if the scatter of f due to fluctuations is small, experimental n_s , γ_p points for events in copper should in this diagram all fall in between the s=2R and the $s=s_1$ line, furthermore that $\approx 1/2$ of all the points should lie upwards of the $s = \bar{s}$ line and that $\approx 3/4$ of all the points should lie upwards of

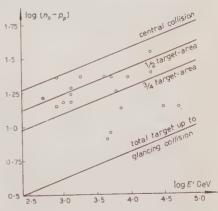


Fig. 3. $-n_s$, γ_p correlation diagram for events in copper with P,N primaries. The straight lines correspond to the theoretical correlation for different values of the impact parameter as indicated. The points mark the Kaplon-Ritson events.

the s=R line. The points corresponding to the Kaplon-Ritson events have been marked in the diagram and it is seen that the agreement with the theoretical prediction is reasonably good. No experimental points fall outside

the total allowed domain. The frequency ratios are 6:20 instead of 10:20 and 11:20 instead of 15:20. Since the total number of events is small the deviations are hardly significant. Also, in taking the s-value equal to the length of the tunnel axis we have overestimated the volume of the tunnel in the case of a non-central hit whence the multiplicities for such hits should be really somewhat smaller. One could improve the theory in this respect and also try slightly different forms of (51). But in view of the large statistical error inherent in the interpretation of Fig. 3 the gain in insight resulting from such possible adjustements would not be great.

If we could assume that the events observed constituted an unbiassed set we could conclude that f(E',m) has about the form f(E'/m) and that for m + M the function f(E') within the range 3000 to 100000 GeV is compatible with

(54)
$$f_{\rm empirical} = (1.0 \pm 0.2) (E'/Me^2)^{0_4 25 \pm 0.05} .$$

One may on the other hand assume that the Bristol $(O \pm 4p)$ star or events with even lower multiplicities are the real glancing collisions. One must then believe that f increases with the length of the tunnel. We will tentatively discuss the extreme assumption (15) that f is independent of the energy and depends upon m (which is a measure for the number of particles in the jet) in the form

$$(55) f = 1 - \varepsilon m.$$

One is led to a law of the type (55) by assuming that the production of particles depends mainly on the number of interactions in the jet. If, at a certain stage, there are n particles in the jet, a new nucleon of the target being added to it will result in a number of interactions equal or at least proportional to n. One may therefore try a law like (55) in the belief that if plural production predominates ε is more likely constant along the tunnel than f. The additive term 1 in (55) is necessary to give a reasonable limiting value of f for small m. The integration of (55) gives

$$(56) m = \sigma \varrho s + m_0 e^{\varepsilon \sigma \varrho s},$$

or

$$n_s = \sigma \varrho s / M + n_p e^{\varepsilon \sigma \varrho s / M}.$$

⁽¹⁵⁾ This form of function was suggested in a discussion by Professor W. Heitler.

To fit (57) with experiment one has to adopt $\varepsilon \approx 2/3$. One finds then that the maximum n_s for $\mathrm{Cu}^{\mathrm{s}_3}$ is 38. The highest value of n_s in the Kaplon-Ritson collection is 36. The impact parameter values for the Kaplon-Ritson events would on (57) and with $\varepsilon = 2/3$ exhibit a distribution 0:7:13 over target areas 5:5:10, corresponding to a rather strong bias against the finding of low-multiplicity events. (Values $2 \le n_s \le 8$ should appear in $\approx 1/4$ of all cases and none were observed).

It is at once obvious that an assumption of the type (55) leads to a prediction of considerably increased multiplicities for the heavier elements. (By contrast, the increase would be small for (54)). It is, perhaps, worth noting again the very high values of n_s obtained by the Bristol Group for stars from silver and bromine. A dependence of f upon m as given by (55) would lead one to expect a median multiplicity of about 50 for showers from lead in the energy region above $4\,000$ GeV. It should be possible to check this prediction (and hence the form of f) in experiments of the Kaplon-Ritson type.

It is not quite certain how an f of the form (55) should be interpreted if substantiated by further experiments, but the following can perhaps be said. Any value of ε outside a fairly narrow domain (say $0.65 < \varepsilon < 0.80$) is evidently impossible, even from the present evidence. Now for larger s the total mass of the cascade grows at every step (for an increase s_1 of s) by a factor e^s and $e^{0.69} = 2$. So one might say that the number of shower particles doubles with every step, and that (on the average, at least) one single shower particle is created per interaction.

6. - Concluding Remarks.

We have shown that at extreme energies the problem of particle production in the nucleon cascade is, in a reasonable approximation, a one dimensional problem. This should be useful for the ultimate link-up of our function f(E',m) with elementary particle theory. In the mean time one must hope for experiments which will enable a more definite guess concerning the form of f(E',m). From the good fit of the heavy primary events in Fig. 2 one can say with some certainty that f does not depend on the cross section of the penetration tunnel, which we think is an experimental confirmation of our claim that the problem is one-dimensional. Furthermore one can say that $f \approx 5$ averaged over a penetration tunnel of about $1\cdot 10^{-12}$ cm length and for $E' \approx 10^{13}$ eV. It would be very desirable to have data of the Kaplon-Ritson type for three targets with widely different atomic weight, say $\Lambda 1^{27}$ and Pb^{20s} besides Cu⁶³. On the basis of the records of say 50 events with $\gamma_p > 1\,000$ in each of these three targets one could probably determine the dependence of f on the length of the tunnel and thereby on E' and m with sufficient ac-

curacy to allow some conclusion regarding the elementary interactions. The problem of the nucleon-nucleon interaction at extreme energies is therefore in our opinion accessible by a method which neither requires the use of hydrogen as target nor the experimentally difficult detection or exclusion of low-multiplicity events.

Acknowledgements.

The authors wish to thank Professor P. A. M. DIRAC who read the paper in manuscript, Professor W. Heitler who discussed the subject with them and Professor E. Schroedinger for his help and criticism throughout the work.

We are grateful to Dr. M. F. KAPLON and Dr. D. M. RITSON for communicating their results before publication.

One of us (F.C.R.) is indebted to the Board of the Dublin Institute for Advanced Studies for a Scholarship and to the Dr. Ignaz-Kreidl Fond for a grant in aid.

RIASSUNTO (*)

Si studia la cascata nel nucleo allo scopo di interpretare le stelle di estrema energia prodotte dai nuclei pesanti. Si fa l'ipotesi che attraverso il nucleo si produca un tunnel netto e che la sezione di questo determini la quantità delle particelle in collisione producenti la cascata. Il tunnel si espande in forma svasata, ma alle massime energie è di forma pressochè cilindrica. La diffusione della cascata è trattata con un'equazione di diffusione del tipo di quella di Fokker-Planck, prendendo in considerazione i momenti secondi. Lo sviluppo della massa si tratta introducendo una funzione indeterminata che si può scegliere in base a teorie di produzione multipla, plurale o mista dei mesoni. Si discutono gli attuali dati sperimentali, dimostrando che non sono ancora sufficienti per determinare una scelta che, probabilmente, potrebbe esser resa possibile da nuovi esperimenti che non presentano nuove o particolari difficoltà.

^(*) Traduzione a cura della Redazione.

Liquid Drop Behaviour of an Independent Particle Nuclear Model.

S. GALLONE and C. SALVETTI

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università e Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 6 Dicembre 1952)

Summary. — The behaviour of a particular indipendent particle nuclear model has been studied in order to investigate the nature of the asymmetric models. It is shown that the asymmetry is not strictly related to the assumption of a Rainwater type model. Moreover analogies in the behaviour of the shell and liquid drop models are indicated and a limitation to the liquid drop description is shown.

It is well known that the asymmetric nuclear shell model proposed by RAINWATER (1) may be considered as a sort of «intermediate» or «mixed» model in the sense that the main part of the nucleons are supposed to cluster together in a core, which is treated as a liquid drop, while the remaining few nucleons are treated as indipendent particles enclosed in the core itself.

The coupling between the indipendent nucleons (extranucleons) and the core is provided by a suitable potential strictly related to the drop shape (e.g. a square well potential whose «wall» coincides with the surface of the drop). Due to the centrifugal pressure exerted by the indipendent nucleons on the surface of the drop, the equilibrium shape of the drop will in general depart from the sphere. Such a collective deformation of the nucleus explains satisfactorily the large values of the nuclear electric quadrupole moments (E.Q.M.).

A difficulty of this model is the criterion of repartition of the nucleons between the «drop» and the indipendent particles. A possible criterion is to assume that the «drop» is formed by the nucleons grouped in the saturated j sub-shells (1) (2). This assumption may look reasonable because when

(1) J. RAINWATER: Phys. Rev., 79, 432 (1950).

⁽²⁾ L. ROSENFELD: Physica, 17, 461 (1951); S. GALLONE and C. SALVETTI: Phys. Rev., 84, 1064 (1951); Nuovo Cimento, 8, 970 (1951); A. Bohr: Det. Kon. Danske Vid. Selsk., 26, n. 14 (1952); R. VAN WAGENINGEN and J. DE BOER: Physica, 18, 369 (1952).

the nucleus is submitted to a collective deformation the first order energy perturbation terms of the indipendent nucleons (with respect to a suitable deformation parameter) satisfy the Schwerpunktsatz $(^2)$ $(^3)$, i.e. the sum of these terms extended to all the states of a j sub-shell vanishes: so that the contribution of the closed shells, and thus of the «core», to the deformation energy vanishes as far as the first approximation only is concerned.

This is no more the case if higher order perturbation terms in the indipendent nucleons energy are taken into account. It might be seen that such terms do not satisfy a Schwerpunktsatz so that the «core» itself gives a contribution to the deformation energy. In the Rainwater picture it is implicitly assumed that the contribution of these higher order terms to the deformation energy is merely given by the surface and coulomb energy variation. The results of Pfirsch (3) seem however to introduce restoring forces by far stronger than those associated with the phenomenological surface energy variation.

It thus appears that the «mixed» model implying the distinction between a «core» (which we are no more allowed to treat as a standard liquid drop) and a number of extranucleons is perhaps an oversimplified picture. On the other hand the strong restoring forces found by Pfirsch are appearently quite in conflict with the liquid drop theory of nuclei.

These considerations lead us to investigate whether a purely indipendent particle model would eliminate some of the mentioned difficulties without destroying the main features of the asymmetric model.

A possible approach to this problem is to consider nucleons moving in a «deformable» potential in which the volume enclosed by any equipotential surface does not vary with the deformation. Such a picture underlies the treatment of nuclear E.Q.M. recently given by Pfirsch. We want to discuss here some features of this model.

Let us assume for sake of simplicity the same potential already used by PFIRSCH which, in the case of a spherical nucleus, reduces to the isotropic oscillator potential. In the following considerations spin will be neglected.

If $\gamma = (a^2 - b^2)/a^2$ indicates the eccentricity of the nucleus, the total energy of a nucleon is given exactly by:

(1)
$$E_{\scriptscriptstyle N} = \hbar\omega \{ (n_1 + n_2 + 1)(1 - \gamma)^{-1/6} + (n_3 + 1/2)(1 - \gamma)^{1/3} \}, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$$

The behaviour of the E_x versus γ is plotted in fig. 1 which gives the energy level scheme as a function of the eccentricity (4).

⁽³⁾ D. PFIRSCH: Zeits. f. Phys., 132, 409 (1952).

⁽⁴⁾ All figures refer to the case $\gamma < 0$.

Expanding (1) up to the second order one obtains:

(2)
$$E_{N} = E_{N}^{(0)} + \gamma E_{N}^{(1)} + \gamma^{2} E_{N}^{(2)} + \dots,$$

where $E_N^{(0)}=\hbar\omega(n_1+n_2+n_3+3/2)$ is the unperturbed nucleon energy and $E_N^{(1)}=\hbar\omega(n_1+n_2-2n_3)/6$. It is seen that the average value of $E_N^{(1)}$ in all states of a shell vanishes (Schwerpunktsatz). The average value on a shell of $E_N^{(2)}$ does not vanish and is given by $E_N^{(0)}/36$.

We are now interested in the total nuclear energy which is (neglecting higher order terms):

(3)
$$E_{k} = \sum_{y} E_{N} = E_{k}^{(0)} + \gamma E_{k}^{(1)} + \gamma^{2} E_{k}^{(2)} + \dots$$

with

$$E_{\scriptscriptstyle k}^{\scriptscriptstyle (0)} = \sum\limits_{\scriptscriptstyle N} E_{\scriptscriptstyle N}^{\scriptscriptstyle (0)} \,, ~~ E_{\scriptscriptstyle k}^{\scriptscriptstyle (1)} = \sum\limits_{\scriptscriptstyle N} E_{\scriptscriptstyle N}^{\scriptscriptstyle (1)} \,, ~~ E_{\scriptscriptstyle k}^{\scriptscriptstyle (2)} = \sum\limits_{\scriptscriptstyle N} E_{\scriptscriptstyle N}^{\scriptscriptstyle (2)} \,.$$

In the second order coefficient we do not include, departing here from Pfirsch's assumption, a coulomb and a phenomenological surface energy term. The

coulomb correction is neglected for mere sake of simplicity, while the liquid drop surface term is explicitly omitted since, as shown later, the simple model here treated already exhibits surface effects.

The «intrinsic» quadrupole of the nucleus is obtained by minimizing the total energy with respect to γ . One obtains for the equilibrium value of the eccentricity parameter:

(4)
$$\overline{\gamma} = -\frac{E_k^{(1)}}{2E_{\nu}^{(2)}},$$

while the gain in total energy is given by:

(5)
$$\Delta E_k = -\frac{(E_k^{(1)})^2}{4E_k^{(2)}}.$$

It follows that there is always an energy gain associated with the appearence of an «intrinsic» quadrupole (except in the case of closed shell nuclei, $E_k^{(1)} = 0$).

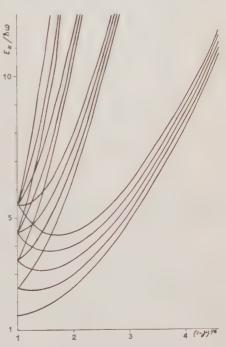


Fig. 1. – Nucleon total energy E_N as a function of eccentricity calculated for the first five unperturbed levels.

One may thus conclude that the main result of the «mixed» model (i.e. the appearence of an asymmetry) is indipendent from the assumption of a liquid drop core. We may thus speak of an indipendent particle asymmetric model rather than of a mixed picture.

Similar results are expected to hold with a different choice of the potential, the essential assumption being that of a constant nuclear volume with respect to the deformation.

An appearent difficulty however arises due to the very strong value of $E_k^{(2)}$ as compared with $E_0^{(2)} + E_c^{(2)}$; as a matter of fact such large values of the restoring forces (5) would be quite in conflict with the liquid drop theory of nuclei (proper oscillation frequencies of the nuclear drop, fission theory,...).

A way out of this difficulty lies in the observation that a sufficiently large deformation may lead to energy level crossings, so that the requirement of minimum energy maintenance during the deformation compells a rearrange-

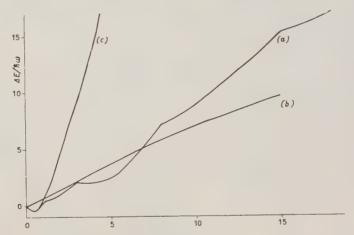


Fig. 2. – Deformation energy for the nucleus $Z=30,\ A=70.$ Curve (a): according to the present shell model. Curve (b): according to the liquid drop model. Curve (c): actual model without level crossings.

ment in the filling of the levels. This happens because the quantum numbers of the ground state (for a given number of protons and neutrons) are functions of the eccentricity. Such a circumstance leads obviously to a strong lowering

⁽⁵⁾ See the cited paper of Pfirsch, page 411.

⁽⁶⁾ Curve (b) has been plotted using the formula $\Delta E_s = \tau \Delta S$, τ being the empirical surface tension and ΔS the exact surface variation. An empirical formula for the binding energy, already used by Peirsch allows the computation of ΔE_s in $h\omega$ units.

of the deformation energy so that the actual model does not exclude a possible agreement with a liquid drop behaviour.

In order to investigate the effect of level crossings, the deformation energy ΔE_k has been calculated using formula (1) and the level diagram of fig. 1. The result of such a calculation for the test nucleus $Z=30,\,A=70$ is shown in fig. 2 curve (a). The phenomenological surface energy variation (liquid drop model) has been plotted on the same diagram, curve (b) (6). Curve (c) showns the deformation energy when no rearrangement in the filling of the levels is performed; comparison of curves (a) and (c) shows the strong attenuation of deformation energy caused by level crossings. As far we understand, Pfirsch formula (3) refers to curve (c); we incidentally remark that this formula is no more valid for deformations involving level crossings. This first determination of the deformation energy is essential for the computation of the nuclear E.Q.M.'s, as shown by Pfirsch, espe-

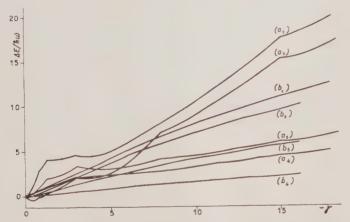


Fig. 3. Deformation energy: (a) curves according to the present shell model; (b) curves, according to the liquid drop model. Indexes 1, 2, 3, 4 refer respectively to the nuclei $(Z=40,\ A=80),\ (Z=30,\ A=70),\ (Z=20,\ A=41),\ (Z=8,\ A=16).$

cially for heavy nuclei for which the RAINWATER picture would lead to excessively large values of the E.Q.M.

Fig. 2 shows that the deformation energy does not depart essentially from the phenomenological liquid drop surface energy variation: the deformation energy of this indipendent particle model reduces therefore, by the mechanism of level crossings, to a surface effect (7).

⁽⁷⁾ There is thus no need to add, as done by Pfirsch, an extra term for taking into account surface effects.

The strong fluctuations of curve (a) are due to shell structure effects and are probably widely exagerated by the extreme degeneracy of the fundamental level scheme here adopted. A suitable choice of the potential could possibly lead to a better agreement between curves (a) and (b).

These considerations apply also to other nuclei as shown by fig. 3.

It is expected that, for sufficiently heavy nuclei and in a more realistic description, the energy variation will be fairly well represented by the (b) curves, because for such nuclei the level spacing will be in general quite regular and small. More exactly, the condition which is required for the lowering of the deformation energy by the mechanism of level crossings is that the occupied levels must be followed by close nearby empty levels. This condition is not verified for « magic » Z or N nuclei in the Mayer-Jensen level scheme. Such « magic » nuclei will thus exhibit an abnormally high deformation energy i.e. high rigidity against collective deformation.

Departures from the liquid drop behaviour are thus expected to occur for Z or M « magic ». There is no need for this that both Z and N be « magic ».

The abnormally low (n, γ) cross sections of « magic » nuclei may perhaps be explained, according to this picture, by their high « rigidity »; the difficulty of the impinging neutron in sharing its energy with the nuclear matter prevents, probably, the formation of a compound nucleus.

We are indebted to Prof. B. Ferretti for many stimulating discussions on the argument and to Miss C. Tamagnini for numerical computations.

RIASSUNTO

Allo scopo di indagare la natura dei modelli nucleari asimmetrici si è studiato il comportamento di un particolare modello a particelle indipendenti. Tale studio, oltre a mostrare che l'asimmetria non è strettamente legata ad un modello del tipo proposto da Rainwater e cioè di carattere intermedio tra quello a goccia e quello a shell, mette in luce alcune analogie di comportamento tra i due modelli estremi e suggerisce alcune limitazioni all'applicabilità del modello a goccia.

Sul modo di vibrazione della superficie di una lamina di quarzo piezoelettrico.

E. Grossetti

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 9 Dicembre 1952)

Riassunto. — Si estende lo studio della diffusione degli ultrasuoni nei liquidi ad un campo di frequenze molto più elevate. Con soluzioni colloidali di Ag e di S e per frequenze di 3,9 e di 4,2 MHz non si è rilevata nessuna variazione di distribuzione nell'intensità del fascio. Con soluzioni di acqua-zucchero caramellato e acqua-glicerina si osserva chiaramente una variazione di distribuzione di intensità. Si è inoltre usato un altro quarzo come sorgente e lo si è fatto oscillare su quattro frequenze diverse, ed i risultati mostrano che la forma dell'oscillazione del quarzo dipende dal liquido; si conferma ancora per questa via il risultato di Dye, secondo cui la superficie emittente della lamina non si mantiene piana nella vibrazione.

In un lavoro precedente (¹) era stato studiato l'andamento dell'intensità di un fascio ultrasonoro in vari liquidi, e ciò principalmente allo scopo di confermare la presenza di una diffusione degli ultrasuoni nei liquidi, fenomeno trovato da Lucas (²) con un metodo diretto. Si era giunti alla conclusione che effettivamente in alcuni liquidi il fascio ultrasonoro si presentava più allargato, fatto che poteva interpretarsi come dipendente da tale fenomeno di diffusione. Evidentemente una prova con lo stesso metodo dell'esistenza di tale processo di diffusione poteva aversi aumentando la frequenza degli ultrasuoni da ν_1 a ν_2 ($\nu_2 > \nu_1$), perchè con tale variazione di ν il processo di diffusione

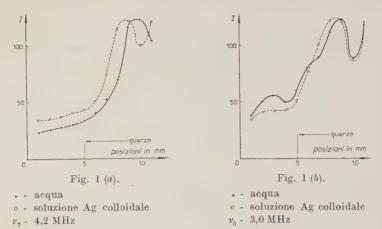
⁽¹⁾ E. GROSSETTI: Nuovo Cimento, 8, 301 (1951).

⁽²⁾ R. Lucas: Journ. de Phys. et le Radium, 8, 41 (1937).

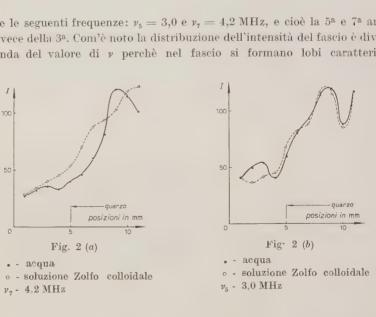
E. GROSSETTI 152

sione (secondo la legge di Tyndall) doveva aumentare notevolmente di intensità secondo il rapporto $(\nu_2/\nu_1)^4$.

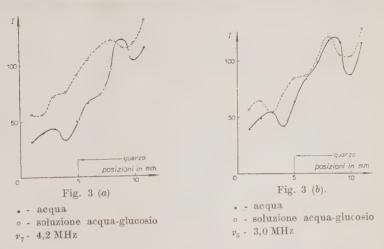
Sono state quindi usate, con gli stessi dispositivi descritti nella Nota pre-



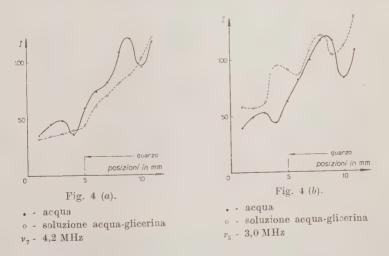
cedente le seguenti frequenze: $v_5=3.0$ e $v_7=4.2$ MHz, e cioè la 5ª e 7ª armonica invece della 3ª. Com'è noto la distribuzione dell'intensità del fascio è diversa a seconda del valore di ν perchè nel fascio si formano lobi caratteristici



che dipendono dalla λ_i cioè da ν e da V (e quindi dal liquido adoperato). Nelle fig. 1 (a, b) e 2 (a, b) si riportano i risultati relativi a soluzioni colloidali e queste curve sono confrontate con quelle ottenute dall'acqua; si attua in questo caso un confronto diretto perchè la λ è la stessa. Le soluzioni sono di Ag e S, la prima di concentrazione 0,037 g/litro e la seconda, ottenuta aggiun-



gendo alcune gocce di ${\rm H}_2{\rm SO}_4$ in una soluzione di acqua ed iposolfito sodico di concentrazione 60 g/litro, con granuli di dimensioni dell'ordine del micron.

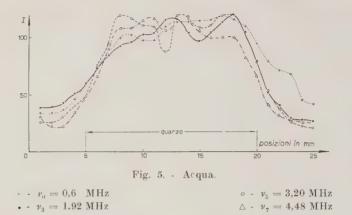


Come vedesi, almeno con queste sostanze, non può dirsi, anche con frequenze molto più elevate (dalla $\nu_3=1.8$ MHz del primo lavoro alle ν_5 e ν_7 rispettivamente di 3,0 e 4,2 MHz) che vi sia una variazione di distribuzione nell'in-

154 E. GROSSETTI

tensità del fascio e precisamente un allargamento, il quale possa assicurare, con questo metodo, la presenza di un fenomeno di diffusione.

Si è proceduto poi alla determinazione della distribuzione dell'intensità del



fascio in due liquidi e precisamente per una soluzione di zucchero caramellato-aequa ($\eta = 0.09$) ed una soluzione di aequa-glicerina ($\eta = 0.03$).

In fig. 3 (a, b) e fig. 4 (a, b) sono riportati i valori della distribuzione dell'intensità relativa all'acqua, e si tiene conto in questo caso della variazione di distribuzione per effetto della variazione di λ perchè per l'acqua, avendo ottenute misure per tre frequenze, e quindi per tre λ , è possibile per interpolazione determinare la distribuzione inerente all'acqua per una λ uguale a quella che si ha nel liquido in esame. Come vedesi anche per questi liquidi, non può parlarsi di un allargamento sicuro del fascio, ma si osserva nettamente una variazione di distribuzione d'intensità. Per essere ben sicuri di questo fatto, si è usato un altro quarzo come sorgente, che ha più o meno la stessa frequenza, e si è proceduto alla determinazione della intensità facendo oscillare il quarzo su quattro frequenze diverse e propriamente ν_0 , ν_3 , ν_5 , ν_7 rispettivamente di 0,64; 1,92; 3,20; 4,48 MHz (fig. 5).

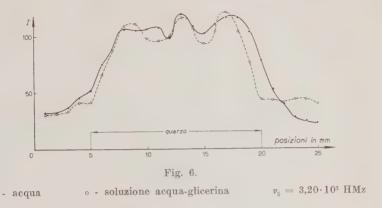
Si hanno così le distribuzioni di intensità riperta'e nella fig. 6 e 7; in esse è anche riportata la distribuzione nel caso dell'acqua (ridotta alla stessa λ per interpolazione).

Come vedesi, la forma dell'oscillazione del quarzo, e cioè la distribuzione dell'energia dipende dal liquido (e cioè dal valore della densità e viscosità) in cui è posto ad oscillare e ciò in modo piuttosto notevole.

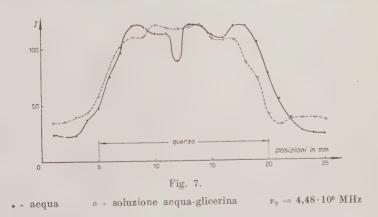
È noto che una lamina di quarzo piezoelettrico a facce piane e parallele, vibrante sulla propria frequenza fondamentale o sulle sue armoniche non emette uniformemente, e cioè la superficie emittente della lamina non si mantiene

piana nella vibrazione a causa della diversità di ampiezza di oscillazione delle varie zone della superficie emittente.

Tale comportamento della superficie del quarzo è stato studiato da W. D



DYE (3) con un metodo interferometrico, e cioè è stato constatato che le frange interferenziali di uguale spessore, equidistanti e parallele che si ottengono nel caso in cui il quarzo non è eccitato, si modificano allorchè si obbliga la lamina



ad oscillare e dall'aspetto di tali frange così modificate può dedursi che la superficie di emissione del quarzo non si mantiene piana durante le vibra-

⁽³⁾ W. D. Dye: The modes of vibration of quartz piezoelectric plates as reveled by an interferometer, in Duc. Roy. Soc. London, A 138, 1 (1932).

156 E. GROSSETTI

zioni; con le nostre misure è stato confermato, per altra via, il risultato di Dye, e si è anche visto che queste variazioni di ampiezza risentono molto della presenza di un carico diverso.

SUMMARY

We extended our investigation of the diffusion of the supersonic waves in liquids to a much higher frequency field. We did not observe any variation with colloidal solutions of Ag and S at frequencies of 0,3 and 4,2 MHz. With solutions of waterburnt sugar and water-glycerin we observed clearly a variation of the intensity distribution. We used also a different quartz source and made it oscillate on four different frequencies. The results showed that the shape of oscillation of the quartz depends on the liquid. In this way we also verified the result of Dye according to which the emitting surface of the plate does not remain plane during the vibration.

Sul problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni (II).

S. ALBERTONI

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

M CUGIANT

Istituto di Matematica dell'Università - Milano

(ricevuta il 10 Dicembre 1952)

Riassunto. — Si espongono nuove considerazioni relative al problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni, in aggiunta a quelle svolte in un nostro precedente lavoro. Nel primo numero si tratterà il problema della derivazione delle distribuzioni trasformate in analogia al teorema classico sulla derivazione delle funzioni composte. Nei numeri successivi si tratterà soprattutto della estensione, al caso di più variabili, dei risultati già ottenuti, nel lavoro accennato, per il caso di una variabile sola. Infine si daranno esempi di applicazione ed in particolare si dimostreranno alcune formule usate in elettrodinamica quantistica.

1. – Rifacendoci ad una nostra precedente nota (¹), che nel seguito verrà da noi citata sotto il simbolo (I), vogliamo qui esporre alcuni risultati relativi allo stesso problema colà trattato.

Ricordiamo anzitutto che se T_x è una distribuzione definita su R^1 e u=u(x) è una funzione continua, definita sull'asse reale, univocamente invertibile in una funzione x=x(u) indefinitamente differenziabile, allora si può definire una

⁽¹⁾ Vedi S. Albertoni e M. Cugiani: Nuovo Cimento, 8, 874 (1951). Come in tale nota citeremo anche qui col simbolo (L.S.) l'opera di L. Schwartz: Théorie des Distributions, in Actualités Scientifiques et Industrielles, nn. 1091 e 1122 (Paris, 1950-51).

distribuzione trasformata T_u nel modo seguente (2)

(1)
$$T_{u}\{\varphi(x)\} = T_{u}\{\varphi(x(u)) \cdot |x'(u)|\}.$$

In modo analogo nel caso di una distribuzione in due variabili $T_{x,y}$ si può definire una distribuzione trasformata $T_{u,y}$

(2)
$$T_{uv}\{\varphi(x,y)\} = T_{uv}\{\varphi(x(u,v),y(u,v)) \cdot J_{\perp}\},$$

ove si supponga che u=u(x,y); v=v(x,y) siano due funzioni univocamente invertibili in tutto il piano in due funzioni x=x(uv); y=y(uv) indefinitamente differenziabili, mentre J è il Jacobiano d(x,y)/d(u,v).

Vogliamo adesso aggiungere qualche osservazione relativa alle derivate delle distribuzioni trasformate così definite. Cominciamo dal caso di una sola variabile. Ci converrà ora supporre che anche la funzione u=u(x) sia indefinitamente differenziabile. Avremo evidentemente:

(3)
$$\frac{\mathrm{d}\,T_u}{\mathrm{d}x}\{\varphi(x)\} = T_u\{-\varphi'(x)\} = T_u\{-\varphi'(x(u))\cdot |x'(u)|\}.$$

Ora possiamo chiederci quale significato si dovrà invece attribuire al simbolo $\mathrm{d}T_u\{\varphi(x)\}/\mathrm{d}u$.

Nel caso in cui la T_x originaria sia una funzione f(x) continua colla sua derivata prima si ha:

$$\frac{\mathrm{d}T_u}{\mathrm{d}u}\{\varphi(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_u'(u)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_u'(u)\varphi(x(u))^\top x'(u) \,\mathrm{d}u = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f_u'(u)\varphi(x(u))x'(u)\,\mathrm{d}u \;;$$

$$\varepsilon = \frac{x'(u)}{|x'(u)|} \,(^3),$$

La necessità di questa distinzione, del resto di per sè abbastanza ovvia, ci è stata suggerita dallo stesso Prof. Schwartz cui siamo inoltre debitori per altri suggerimenti relativi al presente lavoro.

⁽²⁾ Osserviamo che le distribuzioni cui si applica questo cambiamento di variabile sono quelle che, collo Schwartz, chiameremo di « tipo funzione », mentre evidentemente un altro meccanismo di sostituzione si dovrebbe usare per quelle di « tipo densità ». Per le prime, nel caso semplice di una distribuzione funzione f(x), il cambiamento di variabile x - x(u) fa passare da $T_x\{\varphi(x)\} = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ a $T_u\{\varphi(x)\} = \int f(u)\varphi(x(u))\,\mathrm{d}x$ come abbiamo visto, mentre invece per le seconde si passerebbe da $T_x\{\varphi(x)\} = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ a $T_u\{\varphi(x)\} = \int f(u)\varphi(x(u))\,\mathrm{d}u$. Analogamente, ad esempio, si ha per le prime $\delta_{2x}\{\varphi(x)\} = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, mentre per le seconde si avrebbe $\delta_{2x}\{\varphi(x)\} = \delta_x\{\varphi(x)\}$.

⁽³⁾ Si ricordi che la x'(u) non cambia mai segno da $-\infty$ a $+\infty$.

e quindi

$$\frac{\mathrm{d} T_u}{\mathrm{d} u}\{\varphi(x)\} = \left[\,\varepsilon f(u) \varphi(x(u)) x'(u)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \,\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) [\varphi_x'(x(u)) x'^2(u) \, + \, \varphi(x(u)) x''(u)] \, \mathrm{d} u \; .$$

Siamo quindi indotti a formulare la seguente legge di derivazione:

(4)
$$\frac{\mathrm{d}T_u}{\mathrm{d}u}\{\varphi(x)\} = T_u\{-\varepsilon(\varphi_x'(x(u))x'^2(u) + \varphi(x(u))x''(u))\}.$$

Facciamo osservare che in base a questa definizione si può affermare che sono conservate per le distribuzioni alcune proprietà formali del calcolo differenziali ordinario. Abbiamo, per esempio, per le (3) e (4):

$$\frac{\mathrm{d}T_u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}T_u}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Si ha infatti:

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d} T_u}{\mathrm{d} u} \cdot \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} u} \{\varphi(x)\} &= \frac{\mathrm{d} T_u}{\mathrm{d} u} \{\varphi(x) u'(x)\} = \\ &= T_u \{ -\varepsilon [\varphi_x'(x(u)) u'(x(u)) x'^2(u) + \varphi(x(u)) u''(x(u)) x'^2(u) + \varphi(x(u)) u'(x(u)) x''(u)] \} = \\ &- T_u \Big\{ -\varepsilon \Big[\varphi_x'(x(u)) x'(u) - \frac{q(x(u))}{x'^3(u)} x''(u) x'^2(u) + \varphi(x(u)) \frac{x''(u)}{x'(u)} \Big] \Big\} = \\ &= T_u \{ -\varphi_x'(x(u)) |x'(u)| \} \,. \end{split}$$

In modo del tutto analogo si definiranno le derivate parziali per una distribuzione in due variabili.

Avremo, ad esempio:

$$\left\{ rac{\partial T_{uv}}{\partial x} \{ arphi(xy) \} = T_{uv} \left\{ -rac{\partial arphi(xy)}{\partial x}
ight\} = T_{uv} \left\{ -rac{\partial arphi(x(uv), \, y(uv))}{\partial x} \, \left| J \,
ight|
ight\},$$

e posto $\varepsilon = J/|J|$ avremo in analogia al caso precedente:

$$\begin{split} \frac{\partial T_{uv}}{\partial u} \{\varphi(xy)\} &= \frac{\partial T_{uv}}{\partial u} \{\varepsilon \varphi(x(uv), \ y(uv))J\} = \\ &= T_{uv} \Big\{ -\varepsilon \Big[\frac{\partial \varphi(x(uv), \ y(uv))}{\partial u} J + \varphi(x(uv), \ y(uv)) \frac{\partial J}{\partial u} \Big] \Big\} \,. \end{split}$$

Analogamente si definiscono le $\partial T_{uv}/\partial y$ e $\partial T_{uv}/\partial v$. Anche qui si verifica, ad esempio, che vale la relazione:

(6)
$$\frac{\partial T_{uv}}{\partial x} = \frac{\partial T_{uv}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T_{uv}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Naturalmente si è supposto, come nel caso di una sola variabile, che pure le u(xy) e v(xy) siano indefinitamente differenziabili.

- 2. Dopo aver brevemente tratteggiato il problema della derivazione delle distribuzioni trasformate passiamo ad illustrare alcuni esempi di distribuzioni in due variabili che ci saranno particolarmente utili per il seguito.
- a) Ricordiamo la definizione della misura di Dirac δ_{xy} come massa puntuale di valore uno nell'origine:

$$\delta_{x,y}\{\varphi(x,y)\} = \varphi(0,0).$$

Posto u = x - a; v = y - b avremo J = 1 e quindi:

$$\delta_{x-a,y-b}\{\varphi(xy)\} = \delta_{u,v}\{\varphi(u+a,v+b)\} = \varphi(a,b)$$
.

b) Definiamo ora la misura Δ_{xy} come massa lineare di valore uno distribuita lungo l'asse y nel modo seguente:

$$\Delta_{x,y}\{\varphi(xy)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,y) \,\mathrm{d}y.$$

Posto u = ax + by; v = cx + dy, ove $J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, si ha:

$$\begin{split} \varDelta_{ax+by\;cx+dy}\{\varphi(xy)\} = & \varDelta_{u,v}\left\{\left. \varphi\left(\frac{du-bv}{J}\;,\,\frac{av-cu}{J}\right) |J|\right.\right\} = \\ & -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\left(\left. -\frac{bv}{J}\;,\,\frac{av}{J}\right) |J|\,\mathrm{d}r\;, \end{split}$$

da cui si ottiene in particolare:

$$\Delta_{x+y,y}\{\varphi(xy)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(-v,v) \,\mathrm{d}v,$$

$$\Delta_{x-y,y} \{ \varphi(xy) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v, v) \, \mathrm{d}v.$$

c) Posto invece u = x + |y|; v = y si ha J = 1 e quindi:

$$\Delta_{x+|v|,v}\{\varphi(xy)\} = \Delta_{u,v}\{\varphi(u-|v|,v)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-|v|,v) dv$$

ed analogamente:

e

$$\Delta_{x-|y|,y}\{\varphi(xy)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(|v|, v) dv.$$

Si osservi che qui la x(uv) non è più differenziabile dappertutto; tuttavia abbiamo potuto applicare la (2) in base alle seguenti considerazioni:

- 1) La distribuzione $\Delta_{u,e}$ è una misura e quindi definita sullo spazio (\mathcal{C}_w) delle funzioni continue e nulle al di fuori di un compatto, spazio cui appartengono le $\varphi(u \pm |v|, v)$.
 - 2) Lo Jacobiano è continuo e diverso da zero in tutto il piano.
 - d) Consideriamo la misura $D_{x,y}$ così definita:

$$D_{x,y}\{\varphi(xy)\} = \int\limits_0^\infty \varphi(0,y)\,\mathrm{d}y.$$

Si ha immediatamente che:

$$\begin{split} D_{x+y,y} &\{ \varphi(xy) \} = \int\limits_0^\infty \varphi(-v,\,v) \,\mathrm{d} v \;, \\ D_{x+y,y} &\{ \varphi(xy) \} = \int\limits_0^\infty \varphi(v,\,v) \,\mathrm{d} v \;, \\ D_{x+y,-y} &\{ \varphi(xy) \} = \int\limits_0^\infty \varphi(v,-v) \,\mathrm{d} v \;, \\ D_{x-y,-y} &\{ (\varphi(xy) \} = \int\limits_0^\infty \varphi(-v,-v) \,\mathrm{d} v \;, \end{split}$$

onde potremo scrivere:

$$\begin{split} & \varDelta_{x+|y|,y} = D_{x+y,y} - D_{x-y,-y} \; , \\ & \varDelta_{x-|y|,y} = D_{x-y,y} - D_{x+y,-y} \; . \end{split}$$

3. – Ci proponiamo ora di considerare alcuni casi in cui la corrispondenza fra il piano (x, y) ed il piano (u, v) non è più così regolare come nei casi precedenti. Trattiamo, ad esempio, il caso di una corrispondenza del tipo:

(7)
$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = y \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{u + v^2} \\ y = v \end{cases}$$

Al solito prenderemo le mosse dal caso in cui la T_{xy} originaria sia una funzione f(xy) sommabile su ogni compatto. Avremo allora:

$$T_{xy}\{\varphi(xy)\} = \iint f(xy)\varphi(xy) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;,$$

e di qui (trattandosi sempre di distribuzioni « tipo funzione » secondo quanto si è avvertito nella nota (2)):

$$T_{uv}\{\varphi(xy)\} = \iint f(uv)\varphi(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
.

Potremo allora scrivere:

$$egin{aligned} T_{uv}\{arphi(xy)\} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv \int\limits_{+\infty}^{-v^2} f(uv) arphi(-\sqrt{u+v^2},\,v) \cdot rac{-1}{2\sqrt{u+v^2}} \,\mathrm{d}u + \\ &+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv \int\limits_{-v^2}^{+\infty} f(uv) arphi(+\sqrt{u+v^2},\,v) \cdot rac{1}{2\sqrt{u+v^2}} \,\mathrm{d}u = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv \int\limits_{-v^2}^{+\infty} f(uv) \left[rac{arphi(+\sqrt{u+v^2},\,v) + arphi(-\sqrt{u+v^2},\,v)}{2\sqrt{u+v^2}}
ight] \,\mathrm{d}u \,. \end{aligned}$$

Definiamo ora due funzioni $\varphi^*(\pm \sqrt{u+v^2}, v)$ nulle per ogni punto (u, v) interno alla parabola $u+v^2=0$ e coincidenti rispettivamente con $\varphi(\pm \sqrt{u+v^2}, v)$ per ogni punto appartenente o esterno a tale parabola. Possiamo allora scrivere:

$$T_{uv}\{\varphi(xy)\} = \iint f(uv) \left\{ \frac{\varphi^*(+\sqrt{u+v^2},\,v) + \varphi^*(-\sqrt{u+v^2},\,v)}{2\sqrt{u+v^2}} \right\} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \;,$$

e quindi:

(8)
$$T_{uv}\{\varphi(xy)\} = T_{uv}\{\Phi(uv)\}\; ; \;\; \Phi(uv) = \frac{\varphi^*(+\sqrt{u+v^2},v) + \varphi^*(-\sqrt{u+v^2},v)}{2\sqrt{u+v^2}}\; .$$

L'estensione della definizione che scaturisce dalla (8) al caso di una T_{xy} qualsiasi comporta difficoltà analoghe a quelle già incontrate in (I), derivanti dal fatto che in generale la $\Phi(uv)$ non apparterrà allo spazio (\mathcal{O}_{uv}) anzi, in generale, non sarà neppur continua nei punti della parabola $u + v^2 = 0$.

Limitandoci per ora al caso in cui la T_{xy} sia una misura, basterà richiedere che la $\Phi(uv)$ risulti continua dappertutto, per il che è sufficiente supporre che le $\varphi(xy) \in (\mathcal{D}_{xy})$ su cui si applica la T_{uv} risultino nulle lungo l'asse y. In tale ipotesi si può porre infatti $\varphi(xy) = x\overline{\varphi}(xy)$ dove:

(9)
$$\begin{cases} \bar{\varphi}(xy) = \frac{\varphi(xy)}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ \\ \bar{\varphi}(xy) = \varphi'_x(0, y) & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

risultando così $\bar{\varphi}(xy)$ continua in tutto il piano.

Detto ora $P(u_0, v_0)$ un punto esterno alla suddetta parabola e sufficientemente vicino ad essa, gli corrisponderanno nel piano (x, y) due punti (x_0, y_0) ; $(-x_0, y_0)$ vicini fra loro quanto si vuole. Si ha allora:

$$|\Phi(u_0,v_0)| = \left| rac{\sqrt{u_0 + v_0^2} ar{arphi} (\sqrt{u_0 + v_0^2}, v_0) - \sqrt{u_0 + v_0^2} ar{arphi} (-\sqrt{u_0 + v_0^2}, v_0)}{2\sqrt{u_0 + v_0^2}}
ight|,$$

e quindi:

$$|\Phi(u_0, v_0)| < |ar{arphi}(\sqrt{u_0 + v_0^2}, v_0) - ar{arphi}(-\sqrt{u_0 + v_0^2}, v_0)| < arepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sulla varietà $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{D}_{xy})$ delle funzioni $\varphi(xy)$ nulle lungo l'asse y la T_{uv} è così definita come una forma lineare: è facile dimostrare

che inoltre essa è ivi continua. Scelta infatti una successione $\{\varphi_n(xy)\}$ di funzioni $\varphi_n(xy) \in (\mathcal{H})$ tendenti uniformemente a zero in (\mathcal{D}_{xy}) colla pseudo-topologia di questo spazio, ad esse corrisponderanno delle $\Phi_n(ur)$ tendenti a zero nello spazio (\mathcal{C}_{ur}) colla pseudo topologia propria di quest'ultimo.

Infatti dalla relazione ovvia:

$$|\varPhi_{{\bf n}}(uv)| = \frac{1}{2} \, |\bar{\varphi}_{{\bf n}}(\sqrt{u\,+\,v^{\rm 2}},\,v) - \bar{\varphi}_{{\bf n}}(-\sqrt{u\,+\,v^{\rm 2}},\,v)| \ , \label{eq:phin}$$

e dal fatto che in base alle (9) la convergenza delle $\varphi_n(xy)$ e delle $(\partial/\partial x)\varphi_n(xy)$ implica la convergenza a zero delle $\overline{\varphi}_n(xy)$ segue immediatamente l'asserto.

Dalla dimostrazione precedente si vede inoltre che la T_{ur} risulta definita, più in generale, come distribuzione di ordine ≤ 1 .

Vogliamo ora applicare le cose dette al caso in cui la T_{xy} coincida colla misura Δ_{xy} definita nel numero precedente. Avremo allora che la $\Delta_{x^2y^2y}$ è definita per la (8) sul sottospazio (\mathcal{H}) nel modo seguente:

(10)
$$\Delta_{x^2-y^2,y}\{\varphi(xy)\} = \Delta_{uv}\left\{ \begin{matrix} \varphi^*(\sqrt{u+v^2}, v) + \varphi^*(-\sqrt{u+v^2}, v) \\ 2\sqrt{u+v^2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(v, v) + \varphi(-v, v)}{2r} dv.$$

Osserviamo subito che $\Delta_{x^2-y^2,y}$ è definita, come risulta dalla (10), più generalmente per le funzioni dell'iperpiano $(\overline{\mathcal{H}}) \supset (\mathcal{H})$ per cui $\varphi(0,0) = 0$. Onde, ripetendo un procedimento analogo a quello già usato in (I), pp. 880-881, si potrà prolungare la forma Δ , lineare e continua su $(\overline{\mathcal{H}})$, in una forma, chiamiamola $\overline{\Delta}$, lineare e continua su (\mathcal{D}_{xy}) e coincidente con Δ su $(\overline{\mathcal{H}})$. La Δ potrebbe allora essere così definita:

(11)
$$\overline{\Delta}_{x^2-y^2,y}\{\varphi(xy)\} = \Delta_{x^2-y^2,y}\{\chi(xy)\} + C\delta_{xy}\{\varphi(xy)\},$$

ove

$$\chi(xy) = \varphi(xy) - \varphi(0, 0)\varphi_0(xy) \in (\overline{\mathcal{H}}),$$

essendo $\varphi_0(xy)$ una funzione scelta una volta per tutte e tale che $\varphi_0(0,0)=1$, mentre C è una costante arbitraria (4). Vedremo poi nel numero successivo

⁽⁴⁾ A questo proposito facciamo osservare, inoltre, che se $\{\varphi_n(xy)\}$ è una successione di funzioni $\varphi_n(xy) \in (\mathcal{O}_{xy}^{-1})$, le $A_{x^2-y^2,y}\{\varphi_n(xy)\} \to 0$ se le $\varphi_n(xy) \to 0$ anche se le $(\partial_-\partial x)\varphi_n(xy)$ non tendono a zero, potendosi a questa ipotesi sostituire quella meno restrittiva che le $\partial \varphi_n(xy)/\partial x$ siano equilimitate.

come si possa pervenire, nel caso generale di una misura qualsiasi T_{xy} , ad un possibile prolungamento della forma T_{uv} definita su (\mathcal{H}) in una \bar{T}_{uv} definita su tutto lo spazio (\mathcal{Q}_{xy}) e coincidente con T_{uv} su (\mathcal{H}) . La \bar{T}_{uv} sarà in generale affetta da indeterminazioni (salvo casi da esaminare separatamente) sulla natura delle quali ci intratterremo a suo tempo.

4. – Indicheremo con au_{xy} una qualunque distribuzione $\in (\mathcal{D}_{xy}^{'})$ definita nel modo seguente:

$$\tau_{xy}\{\varphi(xy)\} = T_y\{\varphi(0,y)\},\,$$

ove T_y è una qualsiasi distribuzione $\in (\mathcal{O}'_y)$ che opera sulle funzioni della sola variabile y. Analogamente definiremo le distribuzioni:

$$\tau_{xy}^{(\!x\!)}\!\{\varphi(xy)\} = T_y\!\{\!-\!\varphi_x'(0,y)\;, \qquad \tau_{xy}^{(\!x\!z\!)}\!\{\varphi(xy)\} = T_y\!\{\varphi_{xx}''(0,y)\}, \;\; \text{ecc.}$$

Consideriamo ora una distribuzione T_{xy} definita sul sottospazio $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{D}_{xy})$. Facciamo vedere come la T_{xy} si possa prolungare in una distribuzione, chiamiamola \bar{T}_{xy} , continua su tutto (\mathcal{D}_{xy}) e coincidente colla T_{xy} su (\mathcal{H}) . La \bar{T}_{xy} risulterà definita a meno di una τ_{xy} . A tal fine operiamo la seguente scomposizione (essenzialmente unica):

(12)
$$\varphi(xy) = \varphi(0, y)f(x) + \chi(xy) = F(xy) + \chi(xy),$$

ove la f(x) è definita una volta per tutte, ad esempio, nel seguente modo:

$$\left\{egin{array}{lll} f(x) = \exp\left[x^2/(x^2-1)
ight] & \mathrm{per} & |x| < 1 \,, \ \\ f(x) = 0 & \mathrm{per} & |x| \geqslant 1 \,. \end{array}
ight.$$

Si vede intanto che $\chi(xy) \in (\mathcal{H})$.

Se poi (\mathcal{H}_1) è il sottospazio di (\mathcal{D}_{xy}) cui appartengono quelle funzioni, chiamiamole F(xy), che si possano porre nella forma q(0,y)f(x), si potrà allora assumere come definizione della \overline{T}_{xy} la seguente:

(13)
$$\bar{T}_{xy} \{ \varphi(xy) \} = \bar{T}_{xy} \{ F(xy) \} + T_{xy} \{ \chi(xy) \} ,$$

ove $T_{xy}\{F(xy)\}$ è una qualsiasi forma lineare e continua sul sottospazio (\mathcal{H}_1) . Ora, scelta in (\mathcal{H}_1) una successione $\{\varphi_n(0,y)f(x)\}$ di funzioni nulle al di fuori di un compatto fisso K_{xy}^2 di R^2 ed ivi uniformemente convergenti a zero, si

deduce subito che la successione $\{\varphi_n(0,y)\}$ di funzioni nulle al di fuori del compatto fisso K_y^1 , intersezione di K_{xy}^2 coll'asse y, deve convergere uniformemente a zero e viceversa (5).

Quindi dire che le $\varphi_n(0, y)f(x)$ convergono a zero in (\mathcal{H}_1) equivale a dire che le $\varphi_n(0, y)$ convergono a zero in (\mathcal{D}_y) . La corrispondenza fra gli spazi (\mathcal{H}_1) e (\mathcal{D}_y) , evidentemente lineare e biunivoca, è dunque anche continua. Perciò la forma lineare e continua più generale su (\mathcal{H}_1) è definita da una distribuzione generica $T_y \in (\mathcal{O}_y')$. Questo ci permette di scrivere $(^{\varepsilon})$:

$$(14) \qquad \bar{T}_{xy}\{\varphi(xy)\} = T_y\{\varphi(0y)\} + T_{xy}\{\chi(xy)\} = \tau_{xy}\{\varphi(xy)\} + T_{xy}\{\chi(xy)\}.$$

Se poi T_{xy} è una distribuzione di ordine $\leqslant m$ allora le $\varphi(xy)$ si potranno scegliere più in generale nello spazio (\mathcal{O}^m_{xy}) e quindi le $\varphi(0, y)$ nello spazio (\mathcal{O}^m_y) . Le τ_{xy} saranno a loro volta delle distribuzioni di ordine $\leqslant m$.

5. – Continuando nelle considerazioni svolte nel numero precedente vogliamo ora far vedere come in certi casi si possa limitare l'estensione del supporto della τ_{xy} che esprime l'indeterminazione da cui risulta affetta la \bar{T}_{xy} . Se, per esempio, l'intersezione del supporto della T_{xy} iniziale coll'asse y risulta limitata, converrà allora assumere la τ_{xy} in modo che il suo supporto non ecceda tale intersezione. Infatti, in base ad un ragionamento analogo a quello svolto in (I), pag. 885, è chiaro che il valore $T_{xy}\{\varphi(xy)\}$ non muta per alterazioni che la $\varphi(xy)$ venga a subire al di fuori del supporto della T_{xy} .

In particolare, poichè il supporto della τ_{xy} appartiene tutto all'asse y, si potrà pensare che tale supporto non ecceda l'intersezione dell'asse y stesso col supporto della T_{xy} . Per esempio, abbiamo visto al numero 3 che nel caso della $\Delta_{x^2-y^2,y}$ la indeterminazione si può pensare localizzata nell'origine che evidentemente è l'intersezione del supporto (formato dalle rette $x=\pm y$) della $\Delta_{x^2-y^2,y}$ coll'asse y. Così pure la distribuzione T_{xy} definita come segue:

$$T_{xy}\{\varphi(xy)\} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(xy)}{x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
 (C è il cerchio di equazione $x^2+y^2=1$),

risulta evidentemente definita per quelle $\varphi(xy) \in (\mathcal{O}_{xy})$ che si annullano sull'intervallo (-1, +1) dell'asse y. Una qualunque $\varphi(xy)$ potrà essere così

⁽⁵⁾ È importante far osservare che nella scomposizione (12) è essenziale che la F(xy) compaia come prodotto della $\varphi(0, y)$ per una funzione della sola x. Infatti se F(xy) fosse del tipo $\varphi(0, y)\varphi_1(xy)$ la convergenza a zero delle $\varphi_n(0, y)$ in (\mathcal{O}_y) comporta necessariamente la convergenza a zero delle $F_n(xy)$ in (\mathcal{O}_{xy}) ma non viceversa (nel caso, ad esempio, che il supporto delle $\varphi_n(0, y)$ non sia tutto contenuto in quello della φ_1).

⁽⁶⁾ Un ragionamento del tutto analogo a quello qui seguito si trova in (L.S.). vol. I, pag. 57.

scomposta:

$$\varphi(xy) = \varphi_{\varepsilon}(0, y) \exp\left[x^2/(x^2-1)\right] + \chi_{\varepsilon}(x, y) = F_{\varepsilon}(xy) + \chi_{\varepsilon}(xy),$$

ove $\varphi_{\varepsilon}(0, y)$ coincide con $\varphi(0, y)$ sull'intervallo (P(0, -1); Q(0, 1)), è nulla al di fuori dell'intervallo $(P'(0, -1 - \varepsilon); Q'(0, 1 + \varepsilon))$ ed è saldata con continuità nei due intervalli intermedi (7). $\chi_{\varepsilon}(xy)$ risulta allora nulla in (P, Q). Ora è chiaro che benchè $\chi_{\varepsilon}(xy)$ dipenda da ε , tuttavia posto:

$$L = \iint\limits_{c} rac{\chi_{arepsilon}(xy)}{x} \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; ,$$

risulta L indipendente da ε poichè gli intervalli in cui $\chi_{\varepsilon}(xy)$ dipende da ε sono esterni al campo di integrazione. Posto perciò:

$$T_{xy}\{\chi_{\varepsilon}(xy)\}=L$$
,

avremo:

$$T_{xy}\{\varphi(xy)\} = \tau_{xy}\{F_\varepsilon(xy)\} + L \;.$$

Essendo le funzioni $F_{\varepsilon}(xy)$ a supporto tale che non ecceda la striscia $y=-1-\varepsilon,\ y=1+\varepsilon,$ così la generalità non sarà lesa se la distribuzione τ_{xy} è scelta tale che il suo supporto non superi l'intervallo $(-1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon).$ Per l'arbitrarietà di ε si può limitare tale supporto all'intervallo (P,Q). Infatti il contributo eventuale inerente agli intervallini $(P,P'),\ (Q,Q')$ tende evidentemente a zero col tendere a zero di ε qualunque sia la $\tau_{xy}.$

Osserviamo infine che se l'intersezione del supporto della T_{xy} con l'asse y si riduce ad un punto o ad un numero finito di punti di ordinate $\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n$ allora la indeterminazione si ridurrà ad una combinazione lineare di $\delta_{x,y-\eta_1}$, $\delta_{x,y-\eta_2}$..., $\delta_{x,y-\eta_n}$. In questo caso infatti non sarà necessario ricorrere ad una scomposizione di tipo (12) ma si potrà sempre operare una scomposizione analoga a quella usata nel caso della (11).

6. – Tornando ora alla T_{uv} definita al numero 3, formula (8), vediamo che se essa è una misura, come si è sempre supposto, risulterà definita come abbiamo notato sul sottospazio $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{O}_{xy})$. Si deduce in base alle considerazioni dei

⁽⁷⁾ La saldatura si può, ad esempio, fare come in (I), pag. 886.

numeri 4-5 che essa potrà essere prolungata su tutto (\mathcal{D}_{rv}) in una distribuzione \overline{T}_{uv} coincidente colla T_{uv} su (\mathcal{H}) e definita a meno di una distribuzione τ_{rv} il cui supporto non eccederà l'intersezione dell'asse y col supporto della T_{uv} . Anzi, ricordando che la T_{uv} risulta in generale di ordine ≤ 1 , si potrà, in base all'osservazione posta alla fine del numero 4, pensare la indeterminata τ_{rv} come una distribuzione di ordine ≤ 1 , o eventualmente anche meno generale come abbiamo notato alla fine del numero precedente.

Se ora, più in generale, la T_{xy} iniziale anzichè una misura fosse una distribuzione di ordine ≤ 1 , allora affinchè la T_{uv} risulti definita dalla (8) occorrerà che la $\Phi(uv)$ risulti continua colle sue derivate parziali prime $\partial \Phi/\partial u$ e $\partial \Phi/\partial v$.

Le $\varphi(xy) \in (\mathcal{O}_{x^q})$ per cui T_{ur} adesso risulterà definita saranno quelle soddisfacenti alle seguenti condizioni:

(15)
$$\varphi(0,y) = \varphi'_x(0,y) = \varphi''_{xx}(0,y) = 0.$$

A tal fine basterà far vedere che le due derivate parziali $\delta\Phi/\delta u$ e $\delta\Phi/\delta v$ tendono a zero quando il punto (u,v), esterno alla parabola $u+v^2=0$, tende ad essa. Poniamo infatti $\varphi(xy)=x\overline{\varphi}(xy)$ ove:

(16)
$$\begin{cases} \bar{\varphi}(xy) = \frac{\varphi(xy)}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ \\ \bar{\varphi}(xy) = 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Quindi, $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}'_x$, $\bar{\varphi}'_y$, $\bar{\varphi}''_{xx}$ risultano continue e precisamente date da:

$$\overline{\varphi}_{x}'(xy) = \frac{\varphi_{x}'(xy) \cdot x - \varphi(xy)}{x^{2}} \qquad \text{per} \quad x \neq 0 ,$$

$$\overline{\varphi}_{x}'(xy) = 0 \qquad \text{per} \quad x = 0 ,$$

$$\overline{\varphi}_{y}'(xy) = \frac{\varphi_{y}'(xy)}{x} \qquad \text{per} \quad x \neq 0 ,$$

$$\overline{\varphi}_{y}'(xy) = 0 \qquad \text{per} \quad x \neq 0 ,$$

$$\overline{\varphi}_{xx}''(xy) = \frac{x^{2}\varphi_{xx}''(xy) - 2x\varphi_{x}'(xy) + 2\varphi(xy)}{x^{3}} \qquad \text{per} \quad x \neq 0 ,$$

$$\overline{\varphi}_{xx}''(xy) = \frac{\varphi_{xxx}''(0, y)}{3} \qquad \text{per} \quad x \neq 0 ,$$

$$\overline{\varphi}_{xx}''(xy) = \frac{\varphi_{xxx}''(0, y)}{3} \qquad \text{per} \quad x = 0 , \text{ eccetera.}$$

Abbiamo adesso (per un punto (u, v) esterno alla solita parabola):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{[\varphi_x'(+\sqrt{u+v^2}, v) - \varphi_x'(-\sqrt{u+v^2}, v)]\sqrt{u+v^2}}{4(u+v^2)\sqrt{u+v^2}} = \frac{[\varphi_x'(+\sqrt{u+v^2}, v) + \varphi_x'(-\sqrt{u+v^2}, v)]}{4(u+v^2)\sqrt{u+v^2}} = \frac{\bar{\varphi}_x'(+\sqrt{u+v^2}, v) + \bar{\varphi}_x'(-\sqrt{u+v^2}, v)}{4\sqrt{u+v^2}},$$

$$\begin{split} \frac{\partial \varPhi}{\partial v} &= \frac{1}{2} \Big\{ \frac{v}{u + v^2} [\varphi_x'(+\sqrt{u + v^2}, v) - \varphi_x'(-\sqrt{u + v^2}, v)] + \\ &- [q_y'(+\sqrt{u + r^2}, r) - \varphi_y'(-\sqrt{u - r^2}, r)] \cdot \frac{1}{\sqrt{u - r^2}} \\ &- \frac{v}{(u + v^2)\sqrt{u + v^2}} [\varphi(+\sqrt{u + v^2}, v) + \varphi(-\sqrt{u + v^2}, v)] \Big\} = \\ &= \frac{1}{2} \Big\{ \frac{v}{\sqrt{u + v^2}} [\bar{\varphi}_x'(+\sqrt{u + v^2}, v) + \bar{\varphi}_x'(-\sqrt{u + v^2}, v)] + \\ &+ [\varphi_y'(+\sqrt{u + v^2}, v) - \bar{\varphi}_y'(-\sqrt{u + v^2}, v)] \Big\} \;. \end{split}$$

Osserviamo adesso che:

$$\begin{array}{c} \bar{\varphi}_{x}'(+\sqrt{u+v^{2}},v)+\varphi_{x}'(-\sqrt{u+v^{2}},v) = \\ \\ -\bar{\varphi}_{x}'(+\sqrt{u+v^{2}},v)-\bar{\varphi}_{x}'(0,v)-\bar{\varphi}_{x}'(-\sqrt{u+v^{2}},v) \\ -\sqrt{u+v^{2}} \end{array} \stackrel{\bar{\varphi}_{x}'(0,v)}{\underbrace{-\sqrt{u+v^{2}},v}} = \\ \\ -\bar{\varphi}_{x}'(+\sqrt{u+v^{2}},v)-\bar{\varphi}_{x}'(0,v)-\bar{\varphi}_{x}'(0,v)-\bar{\varphi}_{x}'(0,v) \\ -\sqrt{u+v^{2}} \end{array}$$

ha per limite per $u+v^2\to 0$ l'espressione $\varphi''_{xx}(+0,v)-\varphi''_{xx}(-0,v)=0$. Ne consegue che la T_{uv} risulta definita sotto le condizioni poste. Una breve indagine mostra poi in base alle (17) che la T_{uv} tende a zero se le $\varphi_n(xy)$ tendono uniformemente a zero colle loro derivate sino al terzo ordine. La \overline{T}_{uv} risulta in base ai ragionamenti precedenti, una distribuzione di ordine $\leqslant 3$. Essa sarà poi prolungabile su tutto (\mathcal{O}^3_{xy}) in una forma T_{uv} lineare e continua definita a meno di una combinazione lineare di τ_{xy} , $\tau_{xy}^{(x)}$, $\tau_{xy}^{(x)}$, $\tau_{xy}^{(x)}$ ove le τ_{xy} sono distribuzioni di ordine $\leqslant 3$ (8). Si ha, infatti, per una generica $\varphi(xy) \in (\mathcal{O}^3_{xy})$ la scomposizione es-

⁽⁸⁾ In analogia a quanto si è notato nel numero precedente, nel caso in cui l'intersezione del supporto della T_{xy} coll'asse y si riduca ad un punto, per esempio l'origine, l'indeterminazione si ridurrà ad una combinazione lineare di δ_{xy} , $\delta_{xy}^{(cx)}$, $\delta_{xy}^{($

senzialmente unica:

(18)
$$\varphi(xy) = \varphi(0y)f_0(x) + \varphi'_x(0y)f_1(x) + \varphi''_{xx}(0y)f_2(x) + \chi(xy),$$

ove f_0 , f_1 , f_2 sono funzioni $\in (\mathcal{O}_{eq}^3)$ e definite una volta per tutte in modo da soddisfare alle condizioni:

$$\begin{cases} f_0(x) \equiv 0 & \text{per } |x| \geqslant 1 \\ f_0(0) = 1 & \\ f_0'(\pm 1) \rightarrow f_0''(\pm 1) \rightarrow f_0'''(\pm 1) \rightarrow 0 \\ f_0'(0) = f_0''(0) \rightarrow 0 & \text{per } x \rightarrow 1 \\ f_1(x) = 0 & \text{per } x \rightarrow 1 \\ f_1(0) = 0 & \\ f_1'(\pm 1) \rightarrow f_1''(\pm 1) = 0 \\ f_1'(0) = 1 \ ; \quad f_1''(0) \rightarrow 0 \ , \end{cases}$$

$$\left\{egin{array}{ll} f_2(x) \equiv 0 & ext{per} \ |x| \geqslant 1 \ f_2(0) = 0 \ f_2'(\pm 1) = f_2''(\pm 1) = f_2'''(\pm 1) = 0 \ f_2'(0) = 0 \ ; & f_2''(0) = 1 \ . \end{array}
ight.$$

Si verifica subito che $\chi(xy)$ appartiene al sottospazio $(\mathcal{H}^3) \subset (\mathcal{D}_{xy}^3)$ delle q(xy) soddisfacenti alle (15). In base alla scomposizione (18), con considerazioni analoghe a quelle svolte a proposito della (14), si è condotti immediatamente a scrivere:

(19)
$$\bar{T}_{uv}\{\varphi(xy)\} = au_{xy}\{\varphi(xy)\} + au_{xy}^{(x)}\{\varphi(xy)\} + au_{xy}^{(xx)}\{\varphi(xy)\} + T_{uv}\{\chi(xy)\}.$$

- 7. Illustriamo le cose sin qui dette con alcuni esempi:
- a) Assegnata una misura $T_{xy} \in (\mathcal{C}'_{x^y})$ possiamo definire il prodotto sgn $x \cdot T_{xy}$ (ove sgn x = x/|x| per $x \neq 0$ e indeterminata nell'origine).

Dopo aver osservato che per le $\varphi(xy)$ appartenenti al sottospazio (\mathcal{H}) delle $\varphi(xy)$ per cui $\varphi(0y)=0$ si può porre senz'altro:

$$\operatorname{sgn} x \cdot T_{xy} \{ \varphi(xy) \} = T_{xy} \{ \operatorname{sgn} x \cdot \varphi(xy) \} .$$

Per una qualsiasi $q(xy) \in (\mathcal{C}_{xy})$ potremo allora porre in base ai ragiona-

menti del numero 4:

(20)
$$\operatorname{sgn} x \cdot T_{xy} \{ \varphi(xy) \} = \operatorname{sgn} x \cdot T_{xy} \{ \chi(xy) \} + \tau_{xy} \{ \varphi(xy) \},$$

ove $\chi(xy)$ è definita come in (12) e dove τ_{xy} è a sua volta una misura. La misura prodotto sgn $x \cdot T_{xy}$ risulta così prolungata su tutto (\mathcal{C}_{xy}) . Naturalmente se T_{xy} fosse più in generale una distribuzione di ordine 1 dovrebbero le $\chi(xy)$ annullarsi sull'asse y assieme alle $\delta\chi(xy)/\delta x$. Quindi nella (20) comparirà anche una indeterminata τ_{xy}^x essendo le τ_{xy} delle distribuzioni di ordine 1. È facile l'estensione al caso di una $T_{xy} \in (\mathcal{D}_{xy}^{(m)})$.

b) Tenuto conto dell'esempio b) del numero 2 e della (11) possiamo scrivere:

$$\begin{split} \varDelta_{z^2-y^2,y}\{\chi(xy)\} &= \int\limits_{\infty}^{+\infty} \frac{\chi(v,\,v) \,+\, \chi(-\,v,\,v)}{2\,|\,v\,|} \,\mathrm{d}v = \\ &= \frac{1}{2\,|\,y\,|}\, \varDelta_{z-y,y}\{\chi(xy)\} \,+\, \frac{1}{2\,|\,y\,|}\, \varDelta_{z+y,y}\{\chi(xy)\} \;, \end{split}$$

ove $\chi(xy) \in (\mathcal{Q}_{xy}^1)$ è nulla lungo l'asse y. Avremo quindi in generale su (\mathcal{Q}_{xy}^1) :

$$\Delta_{x^2-y^2,y}\{\varphi(xy)\} = \frac{\Delta_{x-y,y} + \Delta_{x+y,y}}{2|y|} \{\chi(xy)\} + C\delta_{xy}\{\varphi(xy)\},$$

ove la $\chi(xy)$ è definita dalla (12).

Facilmente si verifica inoltre che:

$$\operatorname{sgn} x \cdot \varDelta_{x^2 - y^2, y} \{ \varphi(xy) \} = \frac{\varDelta_{x - \lfloor y \rfloor, y} - \varDelta_{x + \lfloor y \rfloor, y}}{2} \{ \chi(xy) \} + C \delta_{xy} \{ q(xy) \}.$$

c) Tornando ora alla misura D_{rg} introdotta nell'esempio d) del numero 2 avremo analogamente alla (10):

$$D_{x^2-y^2,y}\{arphi(xy)\} = \int\limits_0^\infty \!\! rac{arphi(v,\,v)\, + arphi(-\,v,\,v)}{2v}\, \mathrm{d} v \; ,$$

e quindi operando come nel precedente esempio b) potremo scrivere:

$$D_{x^{2}-y^{2},y}\{\varphi(xy)\} = rac{D_{x-y,y}+D_{x+y,y}}{2y}\{\chi(xy)\} + C\delta_{xy}\{\varphi(xy)\},$$

ed inoltre:

$${\rm sgn}\; x \cdot D_{x^2-y^2,y}\{\varphi(xy)\} = \frac{D_{x-y|y} - D_{x+y|y}}{2y} \{\chi(xy)\} \, + \, C \, \delta_{xy}\{\varphi(xy)\} \; .$$

d) In quest'ultimo esempio vogliamo accennare al modo col quale le considerazioni precedenti si possono estendere agli spazi con più di due dimensioni. Consideriamo qui il caso di uno spazio quadridimensionale R^4 _{1, c, q, z}.

Definiamo la misura $\Delta_{t,x,y,-}$ come segue:

$$\Delta_{t,x,y,z}\{\varphi(t,\,x,\,y,\,z)\} = \iiint\limits_{t\,=\,0} \varphi(0,\,x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
 .

Posto ora:

$$\begin{split} \tau &= t - r \;; \qquad r = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \xi &= x \;, \\ \eta &= y \;, \\ \xi &= z \;, \end{split}$$

possiamo scrivere:

$$\varDelta_{\tau,\xi,\eta,\xi}\{\varphi(t,x,\,y,\,z)\} = \varDelta_{t-\tau,x,y,z}\{\varphi(t,\,x,\,y,\,z)\} = \iiint\limits_{t\,=\,\tau} \varphi(r,\,x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\;.$$

La $\Delta_{\tau,\xi,\eta,\xi}$ risulta definita a sua volta come una misura sullo spazio (\mathcal{C}_{txyz}). Analogamente avremo:

$$\varDelta_{t+r,x,y,z}\{\varphi(t,\,x,\,y,\,z)\} = \iiint\limits_{-t\,=\,r} \varphi(-r,\,x,\,y,\,z) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Ripetendo le considerazioni che ci hanno condotti a stabilire la (10) avremo che posto:

$$au = t^2 - r^2 \,, \qquad \qquad \xi = x \,, \qquad \qquad \eta = y \,, \qquad \qquad \zeta = z \,,$$

avremo:

$$\begin{split} \varDelta_{t^2-r^2,x\;y,z}\{\varphi(t,x,y,z)\} &= \\ &= \varDelta_{\tau,\xi,\eta,\xi}\Big\{\frac{\varphi(\sqrt{\tau}+\overline{r^2},\,\xi,\,\eta,\,\zeta) + \varphi(-\sqrt{\tau}+\overline{r^2},\,\xi,\,\eta,\,\zeta)}{2\sqrt{\tau}+\overline{r^2}}\Big\} = \\ &= \iiint \frac{\varphi(r,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)}{2r}\;\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta + \iiint \frac{\varphi(-r,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)}{2r}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\;. \end{split}$$

La $\Delta_{t^2-r^2,x,y,z}$ risulta quindi adesso definita e continua su tutto lo spazio (\mathcal{C}_{try}) senza alcuna condizione particolare sulle $\varphi(t,x,y,z)$. Riassumendo le

formule precedenti potremo anche scrivere:

$$\varDelta_{t^2-r^2,x,y,z}\{\varphi(t,\,x,\,y,\,z)\} = \frac{\varDelta_{t-r,x,y,z}\,+\,\varDelta_{t+r,x,y,z}}{2r}\,\{\varphi(t,\,x,\,y,\,z)\}\;,$$

ossia (omettendo le variabili x, y, z):

(21)
$$\Delta_{t^2-r^2} = \frac{\Delta_{t-r} + \Delta_{t+r}}{2r}.$$

Avremo poi:

$$\begin{split} \operatorname{sgn} t \cdot \varDelta_{t^2 - r^2, x | v, z} \{ \varphi(t, x, y, z) \} &= \iiint_{t = r} \frac{\varphi(r, \xi, \eta, \zeta)}{2r} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta - \\ &- \iiint_{-t = r} \frac{\varphi(-r, \tau, \eta, \zeta)}{2r} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta \,, \end{split}$$

e quindi in definitiva, analogamente a quanto precede, si potrà scrivere:

$$\operatorname{sgn} t \cdot \Delta_{t^2 - r^2} = \frac{\Delta_{t - r} - \Delta_{t + r}}{2r}.$$

Le distribuzioni qui introdotte Δ_{t-r} , Δ_{t+r} , $\Delta_{t^2-r^2}$ si possono pensare come corrispondenti, nello schema di questa teoria, rispettivamente delle funzioni singolari $\delta(x_0-|\mathbf{x}|)$, $\delta(x_0+|\mathbf{x}|)$, $\delta(\mathbf{x}\mathbf{x})$ introdotte da P. A. M. DIRAC nella sua opera (*). Secondo questa interpretazione le nostre formule (21) e (22) forniscono una giustificazione delle corrispondenti formule (7) e (8) usate da quell'Autore nell'opera surriferita (10).

SUMMARY

The aim of this work is the study of the variables transformation in the distribution theory in the case of several variables. The study is applied to prove some formulae concerning Dirac's singular functions, frequently used in quantum-theory.

⁽⁹⁾ Vedi P. A. M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics (Oxford, 1947). Le funzioni cui alludiamo sono introdotte al cap. XII, pag. 276.

⁽¹⁰⁾ Le formule (7) e (8) qui ricordate si trovano appunto nell'opera citata in (9) sempre a pag. 276.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

A Selection Rule for the Reaction $^6\text{Li}(\gamma d)$ ^4He .

A. Gamba and V. Wataghin

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 2 Gennaio 1953)

A discussion of the reaction $^6\text{Li}(\gamma d)^4\text{He}$ for low energy γ -rays has been recently given by E. W. TITTERTON and T. A. BRINKLEY (1). They point out that the cross section is so low as to suggest the existence of selection rules.

In this letter we shall prove that, with reasonable assumptions, a selection rule can be deduced for this reaction, using the formalism developed by R. MALVANO, L. A. RADICATI and one of us (2).

According to the shell model the ground state of ⁶Li is a ³S₁ state (³). We may reasonably assume that the simmetry of the wave function with respect to the simmetric permutation group is given by the following Young pattern



for both spatial and spin coordinates. The only pattern for the isotopic spin

(1) E. W. TITTERTON and T. A. BRINKLEY: Proc. Phys. Soc., 65 A, 1052 (1952). See this paper for other references.

(2) A. GAMBA, R. MALVANO and L. A. RA-DICATI: Phys. Rev., 87, 440 (1952).

(8) W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON and W. A. FOWLER: Rev. Mod. Phys., 22, 291 (1950).

coordinates allowed by the exclusion principle is then



i.e. the total isotopic spin is T=0 for the wave function ψ_i of the ground state of ⁶Li. The simmetry of the final state ψ_f is given by the outer product of the patterns of the deuteron and of the α -particle, which are (²):

$$\square \times \square \times \square \times \square \qquad (T = 0)$$

and

respectively. Therefore the isotopic spin part of ψ_f is

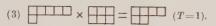
$$(1) \qquad \qquad \bigcap \wedge \bigcap = \bigcap (T = 0).$$

If an electric dipole interaction is assumed, the simmetry of the corresponding Hamiltonian H is

The $H\psi_t$ term of the matrix element

(2)
$$\int \psi_f^* H \psi_i \, \mathrm{d}\tau ,$$

for the reaction will then necessarily (2) have for the isotopic spin coordinates a simmetry of the type



Therefore the matrix element (2) vanishes, since the isotopic spin part of ψ_f and $H\psi_i$ belong to different representations (see (1) and (3)).

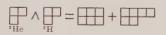
Alternatively, assuming the existence of a selection rule of this type, the simmetry of the spatial part of ψ_i may be inferred.

In all these considerations we have implicitly assumed an L-S coupling scheme. However, this is not really necessary. The only argument needed is a T=0 ground state for ^6Li , which can consistently be maintained also with a j-j coupling scheme and charge independent forces.

We can also say that the transition T=0 $(\psi_i) \rightarrow T=0 (\psi_f)$ is always forbidden for electric dipole interaction. However, such a statement would rather obscure the physical meaning of total isotopic spin, which can be defined only in connection with simmetry properties with respect to the permutation group.

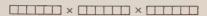
With the same arguments we can also explain the reaction observed by Alm-QVIST *et al.* (4) bombarding a tritium target with 200 keV ³He ions.

In fact, we obtain the isotopic spin patterns of ψ_i as follows:



(4) E. ALMQVIST, K. W. ALLEN and T. P. PEPPER: Phys. Rev., 83, 202 (1951).

Therefore in this case there exist the two simmetry states T=0 and T=1 for ψ_i . Since now the interaction is of the type



the isotopic spin part of $H\psi_i$ will contain both the Young patterns



From this we cannot draw the conclusion that $H\psi_i$ and ψ_f belong to different representations and the selection rule does not hold any more. It follows that no contradiction exists between the results of Almqvist *et al.* (4) and those of Titterton and Brinkley (1).

The actual numerical values of the cross section cannot be deduced with arguments of this type since selection rules are essentially of a qualitative nature. However, we wish to add that the isotopic spin part of the Hamiltonian both for electric quadrupole and magnetic dipole transitions contains two Young patterns, one like the pattern of the electric dipole and the other completely simmetric. The latter allows all the transitions:

 6 Li (γn) 5 Li, 6 Li (γp) 5 He, 6 Li (γd) 4 He,

while the former forbids the last one. Thus the first two reactions are probably favored with respect to the last one, what further diminishes the cross section for the reaction $^6\text{Li}(\gamma d)$ ^4He .

We express our thanks to prof. M. Verde for very illuminating discussions.

A proposito della dinamica nucleare.

A. KIND

Istituto di Fisica dell'Università - Padova Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 5 Gennaio 1953)

Un modello che, almeno nelle linee generali, pare dia buoni risultati nella descrizione delle reazioni nucleari ad alte energie è quello che, schematizzando una immagine suggerita da Serber (1) (2) (3) divide tali processi in due fasi distinte: 1) penetrazione nel nucleo della particella incidente con formazione di una cascata nucleonica i cui prodotti più veloci lasciano direttamente il nucleo; 2) distribuzione dell'energia residua a tutto il nucleo che, dopo avere raggiunto uno stato di equilibrio termodinamico, «evapora» una seconda serie di particelle.

Condizione necessaria affinchè la seconda fase del processo possa essere descritta come evaporazione è che il tempo impiegato da un nucleone per portargi in equilibrio termodinamico coi rimanenti sia trascurabile di fronte al tempo da esso impiegato per uscire dal nucleo. Diversamente, non si può parlare di evaporazione e bisogna tenere conto della simultaneità dei due processi: quello di assestamento e quello di emissione (vedi auche Puppi e Coll. (4)).

Per studiare questo lato del problema nel modo più rapido possibile ci siamo serviti del modello del gas di Fermi. Mediando cioè su protoni e neutroni, abbiamo descritto il nucleo mediante il numero medio $n(\varepsilon,t)\,\mathrm{d}\varepsilon$ di nucleoni che all'istante t hanno energia cinetica compresa fra ε e $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$. Abbiamo quindi introdotto, da un lato le modalità di interazione fra i nucleoni considerando l'interazione fra le rispettive onde piane. d'altro lato le modalità di emissione considerando il coefficiente di trasmissione per le relative onde piane alla superficie del nucleo.

Si tratta di un modello molto semplificato dal quale non si possono quindi attendere indicazioni di dettaglio. Crediamo però che i risultati ottenuti possano avere un certo interesse, se non altro, per il fatto che il modello considerato rappresenta la semplificazione opposta a quella data dal modello evaporativo.

⁽¹⁾ R. SERBER: Phys. Rev., 72, 1114 (1947).

⁽²⁾ L. M. GOLDBERGER: Phys. Rev., 74, 1269 (1948).

⁽³⁾ G. BERNARDINI: Phys. Rev., 83, 669 (1951).

⁽⁴⁾ G. P. PUPPI, V. DE SABATA, E. MANARESI: Nuovo Cimento, 9, 726 (1952).

La dinamica di un tale nucleo è descritta dall'equazione di diffusione

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\varepsilon, t) = \Delta^+(\varepsilon, t) - \Delta^-(\varepsilon, t) - \Phi(\varepsilon, t) ,$$

con

$$\triangle^{+}(\epsilon,t) = \frac{1}{2} \frac{1}{V(t)} \int_{0}^{\epsilon} \mathrm{d}\epsilon' \, n(\epsilon',t) \varepsilon(\epsilon'') \int_{0}^{\epsilon} \mathrm{d}\epsilon'' \, n(\epsilon'',t) \sigma(\epsilon',\epsilon'',\epsilon) \left[1 - \frac{n(\epsilon,t)}{\omega(\epsilon,t)} \right] \left[1 - \frac{n(\epsilon'+\epsilon''-\epsilon,t)}{\omega(\epsilon'+\epsilon''-\epsilon,t)} \right] .$$

$$\triangle \stackrel{\cdot}{(\varepsilon, t)} = \frac{1}{2} \frac{n(\varepsilon, t) v(\varepsilon)}{V(t)} \int\limits_0^\varepsilon \mathrm{d} \epsilon' \, n(\varepsilon', t) \int\limits_0^\varepsilon \mathrm{d} \epsilon'' \, \sigma(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \left[1 - \frac{n(\varepsilon'', t)}{\omega(\varepsilon'', t)} \right] \left[1 - \frac{n(\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'', t)}{\omega(\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon'', t)} \right] .$$

$$\Phi(\varepsilon,t) = \frac{3}{4} \frac{n(\varepsilon,t)v(\varepsilon)}{R(t)} T(\varepsilon).$$

dove sia

- $v(\varepsilon)$ velocità di un nucleone di energia cinetica ε ;
- V(t) volume nucleare:
- R(t) raggio nucleare;
- $\sigma(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') d\varepsilon''$ sezione efficace per un urto fra due nucleoni di energia cinetica $\varepsilon \in \varepsilon'$, in seguito al quale uno dei due si trovi ad avere energia cinetica compresa fra $\varepsilon'' \in \varepsilon'' + d\varepsilon''$;
- $\omega(\varepsilon, t)$ densità di stati nel nucleo;
- $T(\varepsilon)$ coefficiente di trasmissione alla superficie del nucleo per un nucleone di energia cinetica ε .

Una prima integrazione approssimata per un nucleo di 100 nucleoni ha dato i seguenti risultati:

l) Tempo τ durante il quale permane nel nucleo la «memoria» della modalità di eccitazione.

Per studiare un caso concreto abbiamo ammesso che il nucleo sia stato eccitato dall'assorbimento di 3 mesoni π che possono essere immaginati come prodotti nei primi urti della cascata nucleonica generata nel nucleo stesso da un nucleone veloce incidente. In questo caso, per conoscere la situazione nel nucleo all'istante in cui le particelle di emissione diretta l'hanno lasciato, abbiamo a disposizione la distribuzione energetica residua media data da Puppi e Coll. (1) per l'assorbimento di un mesone π^- . Ammettendo che le tre cascate, che avvengono a nucleo freddo, possano essere considerate indipendenti l'una dall'altra, abbiamo pressapoco triplicato la perturbazione data da questi Autori ed ottenuto una energia di eccita-

178 A. KIND

zione di 150 MeV. Con questa distribuzione iniziale, il tempo τ risulta dell'ordine di ½· 10^{-22} s. Durante questa fase viene emesso un nucleone, che rappresenta circa il 10% della totalità dei nucleoni emessi per una eccitazione di 150 MeV.

2) Trascorso il tempo di assestamento τ , il nucleo continua ad emettere nucleoni fino all'esaurimento dell'energia di eccitazione. Secondo la teoria evaporativa, durante tutto questo tempo le successive distribuzioni energetiche dei nucleoni sono distribuzioni di equilibrio. Nel nostro caso esse sono invece perturbate. Si è calcolata questa perturbazione per energie di eccitazione di 150 e 400 MeV e per entrambi i casi si è ottenuta una perturbazione che, da nulla per bassi valori di sale al 20% per i valori più alti. La stessa perturbazione si ritrova naturalmente nello spettro di emissione.

Ciò che ci pare particolarmente interessante è che tale perturbazione non dipende praticamente dall'energia di eccitazione. Questo fatto dipende da una compensazione che avviene fra l'aumento della velocità di emissione coll'aumentare dell'energia ε e l'aumento dell'interazione fra i nucleoni col crescere dell'eccitazione. Dato che questo risultato non dipende in modo particolare dal modello usato, ci pare di potere affermare che, fintanto che si possano trascurare processi legati a fluttuazioni spaziali come l'emissione di frammenti pesanti, la bontà o meno dei modelli « evaporativi » non dipende in modo essenziale dall'energia di eccitazione residua.

Desideriamo ringraziare il prof. N. Dallaporta ed il prof. G. Puppi per le frequenti ed utili discussioni con essi avute.

Nota sullo sparpagliamento laterale degli sciami alle alte energie.

G. POIANI e C. VILLI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

(ricevuto il 12 Gennaio 1953)

In una precedente nota (¹) si era osservato che, a causa delle condizioni imposte nella teoria verticale della cascata elettrofotonica sviluppata dal gruppo di Padova (²) (³) (⁴), era possibile descrivere, tramite gli spettri unidimensionali forniti da quest'ultima, il comportamento laterale degli sciami sino ad energie degli elettroni e dei fotoni minori dell'energia limite η_0 relativa alla sezione d'urto asintotica per formazione di coppie. Per energie maggiori di η_0 si erano trovati i valori asintotici delle grandezze caratteristiche che definiscono lo sparpagliamento laterale, coincidenti con quelli che si ricavano applicando direttamente l'approssimazione « A di Rossi e Greisen (⁵). Roberg e Nordheim (⁶) hanno, d'altra parte, ottenuto valori dello sparpagliamento laterale lievemente diversi da quelli asintotici per energie maggiori od uguali a η_0 .

Questa circostanza ci ha indotto a riprendere i calcoli allo scopo di colmare, nella descrizione laterale dello sciame, la lacuna esistente nella parte bassa delle alte energie e di accertare se il raccordo fra le grandezze che esprimono lo sparpagliamento laterale nella regione della media $(\varepsilon' \leqslant E < \eta_0; \ \varepsilon' \leqslant W < \eta_0)$ ed alta $(E \geqslant \eta_0; W \geqslant \eta_0)$ energia si possa ottenere, tenendo conto che nell'estremo limite inferiore di quest'ultima le perdite per ionizzazione, pur essendo poco rilevanti, non sono però del tutto trascurabili.

Si è inoltre voluto accertare se i risultati ottenuti da Roberg e Nordheim applicando il metodo delle collisioni successive si possano ottenere, almeno nella predetta regione energetica, in modo più semplice e diretto applicando l'approssimazione «B» di Rossi e Greisen nella forma semplificata e valida per elettroni e fotoni di energia maggiore o uguale a $\eta_0 \sim 4\beta$.

⁽¹⁾ G. POIANI e C. VILLI: Nuovo Cimento, 9, 1109 (1952).

⁽²⁾ N. DALLAPORTA e E. CLEMENTEL: Nuovo Cimento, 3, 235 (1946).

⁽³⁾ N. DALLAPORTA e G. POIANI: Nuovo Cimento, 4, 1 (1947).

⁽¹⁾ E. CLEMENTEL e E. FABBRICHESI: Nuovo Cimento, 5, 77 (1948); 6, 399 (1949).

⁽⁵⁾ B. Rossi e K. Greisen: Rev. Mod. Phys., 13, 241 (1941).

⁽⁶⁾ J. ROBERG e L. W. NORDHEIM: Phys. Rev., 75, 444 (1949).

Eseguendo i calcoli secondo gli usuali criteri (1) (7) e adottando le notazioni di Rossi e Greisen, si trova che lo sparpagliamento integrale, mediato sullo sviluppo longitudinale dello sciame, è definito dalle seguenti espressioni:

a) componente elettronica

$$\theta^{2-N}R^{N} = \left\langle \frac{\varrho_{1}(1, \beta/E)}{3} \sum_{1}^{2} \frac{H_{R}^{(N)}(3)}{\varrho_{R}\left(3, \beta/E\right)} \right\rangle \left(\frac{E_{c}}{E}\right)^{2} = f_{N}(E) \left(\frac{E_{c}}{E}\right)^{2};$$

b) componente fotonica

$$(1b) \ \ '\theta^2 - ^{\mathsf{N}} R^{\mathsf{N}} \backslash_{_{\Pi}} \ = \ \left\langle \frac{H_1(1)W^2}{3\sqrt{3}G_1(1,\beta/W)} \sum_{1}^2 (-1)^{k+1} L_{_{\Lambda}}^{(\mathsf{N})}(3) G_{_{\mathcal{K}}} \bigg(3, \ \frac{\beta}{W} \bigg) \right\rangle \backslash \left(\frac{E_c}{W} \right)^2 - \varphi_{_{\mathcal{K}}}(W) \bigg(\frac{E_c}{W} \bigg)^2.$$

in cui

$$H_{\rm K}^{\rm (N)}(s+2) = (-1)^{\rm N} N! \, \frac{H_{\rm K}(s+2)}{[\lambda_{\rm I}(s) - \lambda_{\rm K}(s+2)]^{\rm N+1}} \; ; \label{eq:hamiltonian}$$

$$L_{\rm K}^{\rm (N)}(s+2) = (-1)^{\rm N} N! \frac{L_{\rm K}(s+2)}{\sqrt{s+2\left[\lambda_1(s)-\lambda_{\rm K}(s+2)\right]^{\rm N+1}}} \cdot \frac{L_{\rm K}(s+2)}{(s+2)^{\rm N+1}} \cdot \frac{L$$

$$\cdot \int\limits_{W}^{\infty} g_{\mathbb{X}} \left(s, \frac{\beta}{W'} \right) W' - {}^{(s+1)} \, \mathrm{d} \, W' = G_{\mathbb{X}} \left(s, \frac{\beta}{W} \right) \; .$$

Per valori dell'energia maggiori od uguali a circa $100\,\beta$ l'effetto della ionizzazione risulta inapprezzabile e le (1a,b) divengono $[\beta=0\,;\,\varrho_{\mathbb{K}}(0,\,\beta/E)=1\,;\,G_{\mathbb{K}}(1,\,0)=1/W\,;\,G_{\mathbb{K}}(3,\,0)=1/3W^2]$:

$$\begin{split} & \left\langle \theta^{2-N} R^N \right\rangle_E = -\frac{N!}{3} \left\langle \frac{H_1(3)}{\lambda_1^{N+1}(3)} + \right. \left. \frac{H_2(3)}{\lambda_2^{N+1}(3)} \right\rangle \left(\frac{E_c}{E} \right)^2, \\ & \left\langle \theta^{2-N} R^N \right\rangle_W = \left. - \frac{N! \, H_1(1) L_1(3)}{3\sqrt{3} \, L_1(1)} \left\langle \frac{1}{\lambda_1^{N+1}(3)} - \frac{1}{\lambda_2^{N+1}(3)} \right\rangle \left(\frac{E_c}{W} \right)^2. \end{split}$$

coincidenti con le espressioni asintotiche ottenute da Borsellino applicando direttamente l'approssimazione « A » (8).

I valori numerici delle funzioni $f_n(W)$ e $\varphi_n(W)$ relativi all'angolo medio quadratico (n=0) ed alla deviazione media quadratica (n=2) sono rappresentati in Tabella I.

⁽⁷⁾ G. POIANI e C. VILLI: Nuovo Cimento, 9, 825 (1952).

^(*) A. Borsellino: Nuovo Cimento, 6, 543 (1949); 7, 323 (1950); 7, 638 (1950);

TABELLA I.

FILE AFFICE IN	$f_n(E)$				$\varphi_n(E)$		
$E/eta, \; W/eta \; [$	n = 0	1	n = 2	1	n = 0	į	n = 2
∞	0,189	1	0,242	1	0,058		0,251
10	0,181		0,221	1	0,050		0,248
9	0,178	t t	0,212	1	0,049		0,245
8	0,172		0,203	1	0,047	1	0,241
7	0,164		0,193		0,045		0,237
6	0,153		0,182	1	0,044		0,231
5	0,140		0,172	1	0,042		0,223

On Differential Conservation Laws in Non-local Field Theories.

J. Rzewuski

Institute of Theoretical Physics of the University - Wroclaw (Poland)

(ricevuto il 13 Gennaio 1953)

It has been shown by the author (RZEWUSKI, 1952) how to construct integral conservation laws for non-local theories as a consequence of the invariance of the action integral with respect to translations and rotations of space-time and gauge transformations of the first kind.

In this note we wish to describe briefly a possibility of constructing differential conservation laws resulting from the Euler-Lagrange field equations independently of the transformation properties of the action integral. These differential laws may be of importance for a better understanding of non-local theories and especially for their differential (canonical) quantization. (The integral quantization corresponding to integral conservation laws being possible by means of the S-matrix methods (1)).

We start with the action integral

$$\begin{cases} W_{21} & \sum_{n} W_{21}^{n} \\ W_{21}^{n} & = \int \dots \int_{\sigma_{1}} \mathrm{d}x^{1} \dots \, \mathrm{d}x^{n} \zeta^{n}[x^{1}, \, ..., \, x^{n}, \, q^{\alpha}(x^{1}), \, ..., \, q^{\alpha}(x^{n}), \, ..., \, q^{\alpha}_{\nu_{1} \dots \nu_{g}}(x^{1}), \, ..., \, q^{\alpha}_{\nu_{1} \dots \nu_{g}}(x^{n})], \end{cases}$$

corresponding to an arbitrary non-local theory containing multiple integrals and derivatives of the fields $q^{\alpha}(x)$ up to the s-th order. σ_1 and σ_2 are two space-like surfaces and x^i is a point of space-time with coordinates x^i_{μ} ($\mu=1,2,3,4$).

Denoting

(2)
$$\zeta_{21}^n = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_{\sigma_1} dx^1 \dots dx^{n-1} \sum_{m=1}^n \zeta^n [x^m = x], \qquad \zeta_{21} = \sum_n \zeta_{21}^n,$$

(3)
$$p_{\nu_1...\nu_k}^{\alpha}(\sigma_2\sigma_1) = \sum_{i=0}^{s-k} (-1)^i \, \partial_{\mu_1...\mu_i} \, \frac{\partial \zeta_{21}}{\partial q_{\nu_1...\nu_k}^{\alpha} \mu_1...\mu_i}, \qquad k=1, 2, ..., s \,,$$

⁽¹⁾ J. RZEWUSKI: Acta Phys. Polonica, 11, 9 (1951).

we may write the Euler-Lagrange equations following from (1) in the form

$$\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial q^{\alpha}} - \partial_{\nu} p^{\alpha}_{\nu} (\sigma_2 \sigma_1) = 0 .$$

The infinitesimal change δW_{21} of W_{21} due to a variation $\delta x_{\mu} = \varepsilon_{\mu} - \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu}$ of the coordinates x_{μ} and an independent variation $\delta_0 q^{\alpha}$ of the field q^{α} takes, on account of (4), the form

(5)
$$\delta W_{21} = F_{21}(\sigma_2) - F_{21}(\sigma_1),$$

where

$$(6) \hspace{1cm} F_{21}(\sigma) = \int\limits_{\sigma} \mathrm{d}\sigma_{\nu} \left\{ T_{\nu\mu}(\sigma_{2}\sigma_{1})\delta x_{\mu} + \sum_{i=0}^{s-1} p_{\nu\nu_{1}\dots\nu_{i}}^{\alpha}(\sigma_{2}\sigma_{1})\delta q_{\nu_{1}\dots\nu_{i}}^{\alpha} \right\},$$

(7)
$$\delta q_{\nu_1\dots\nu_s}^{\alpha} = \delta_0 q_{\nu_1\dots\nu_s}^{\alpha} + q_{\lambda\nu_1\dots\nu_s}^{\alpha} \delta x_{\lambda} + \varepsilon_{\delta\varrho} S_{\delta\varrho\nu_1\dots\nu_s\mu_1\dots\mu_s}^{\alpha\beta} q_{\mu_1\dots\mu_s}^{\beta},$$

$$T_{\nu\mu}(\sigma_{2}\sigma_{1}) = \delta_{\nu\mu}\zeta_{21} - \sum_{i=0}^{s-1} p_{\nu\nu_{1}...\nu_{i}}^{\alpha}(\sigma_{2}\sigma_{1})q_{\mu\nu_{1}...\nu_{i}}^{\alpha} - \partial_{\lambda}f_{\lambda\nu\mu}(\sigma_{2}\sigma_{1}),$$
(8)

$$(9) \quad f_{\lambda\nu\mu}(\sigma_{2}\sigma_{1}) = \sum_{i=0}^{s-1} \left\{ \gamma^{\alpha}_{\lambda\nu_{1}...\nu_{i}}(\sigma_{2}\sigma_{1}) S^{\alpha\beta}_{\nu\mu\nu_{1}...\nu_{i}\nu\mu_{1}...\mu_{i}} \right. \\ \left. + \ p^{\alpha}_{\mu\nu_{1}...\nu_{i}}(\sigma_{2}\sigma_{1}) S^{\alpha\beta}_{\nu\lambda\nu_{1}...\nu_{i}\mu_{1}...\mu_{i}} \right. \\ \left. - \ p^{\alpha}_{\nu\nu_{1}...i_{i}}(\sigma_{2}\sigma_{1}) S^{\alpha\beta}_{\mu\lambda\nu_{1}...\nu_{i}\mu_{1}...\mu_{i}} \right\} q^{\beta}_{\mu_{1}...\mu_{i}}$$

The notation A_{21} or $A(\sigma_2\sigma_1)$, A representing any of the quantities occurring in this calculation, reminds one of the dependence of the corresponding quantity on fields integrated over the whole domain of space-time between σ_1 and σ_2 .

It was shown by the author (2) that from the invariance of (1) with respect to translations and rotations of space-time and to gauge transformations of the first kind there follow integral conservation laws

$$(10) \quad Q(\sigma_2)_{21} = Q(\sigma_1)_{21} \,, \qquad \quad Q(\sigma)_{21} = \int \mathrm{d}\sigma_\nu \, \dot{j}_\nu (\sigma_2 \sigma_1) \,,$$

(11)
$$P_{\mu}(\sigma_2)_{21} = P_{\mu}(\sigma_1)_{21}, \qquad P_{\mu}(\sigma)_{21} = \int\limits_{\sigma} \mathrm{d}\sigma_v T_{\nu\mu}(\sigma_2\sigma_1),$$

(12)
$$M_{\mu\nu}(\sigma_2)_{21} = M_{\mu\nu}(\sigma_1)_{21}$$
, $M_{\mu\nu}(\sigma)_{21} = \int_{\sigma} d\sigma_{\lambda} M_{\lambda\mu\nu}(\sigma_2\sigma_1)$, $M_{\lambda\mu\nu} = x_{\mu}T_{\lambda\nu} - x_{\nu}T_{\lambda\mu}$.

for the total charge, energy-momentum and angular momentum. Here $T_{\nu\mu}$ is given by (8) and

(13)
$$j_{y}(\sigma_{2}\sigma_{1}) = -ie\eta^{\alpha} \sum_{i=0}^{r-1} p_{yy_{1}...y_{i}}^{\alpha}(\sigma_{2}\sigma_{1})q_{y_{1}...y_{i}}^{\alpha},$$

(2) J. RZEWUSKI: Acta Phys. Polonica (in publication, 1952).

with $\eta^x = 0$, or ± 1 according to the transformation character of the field q^x . It was shown also that differential conservation laws

(14)
$$\partial_{\nu}j_{\nu}=0, \qquad \partial_{\nu}T_{\nu\mu}=0, \qquad \partial_{\lambda}M_{\lambda\mu\nu}=0,$$

for the densities j_{ν} , $T_{\nu\mu}$, $M_{\lambda\mu\nu}$ follow from (10-12) if the condition is satisfied

$$\zeta^n \equiv 0 \quad \text{for} \quad n \geqslant 2.$$

These results seem to indicate that it is impossible in general to derive differential conservation laws from the invariance of (1) with respect to the three types of transformations. Since for all non-local theories containing multiple integrals the condition (15) is not satisfied there arises the question whether it is at all possible to construct differential conservation laws for these theories.

To answer this question we consider the quantities

$$(16) \quad Q'(\sigma)_{21} \quad = Q(\sigma)_{21} \,+\, ie\eta^{\scriptscriptstyle \Delta} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma} \sum_{i=0}^{s} \frac{\partial \zeta_{21}}{\partial q^{\scriptscriptstyle \Delta}_{\nu_1\dots\nu_i}} q^{\scriptscriptstyle \Delta}_{\nu_1\dots\nu_i} \mathrm{d}x \,+\, \mathrm{const.} \,,$$

(17)
$$P'_{\mu}(\sigma)_{21} = P_{\mu}(\sigma)_{21} - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \left(\frac{\partial \xi_{21}}{\partial x_{\mu}}\right)_{\text{ex}} dx + \text{const.}$$
,

(18)
$$M'_{\mu\nu}(\sigma)_{21} = M_{\mu\nu}(\sigma)_{21} - \int_{\sigma_1}^{\sigma} \left\{ T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} + x_{\mu} \begin{pmatrix} \partial \zeta_{21} \\ \partial x \end{pmatrix}_{\text{ex}} - x_{\nu} \begin{pmatrix} \partial \zeta_{21} \\ \partial x_{\mu} \end{pmatrix}_{\text{ex}} \right\} dx + \text{const.},$$

where $(\partial \zeta_{21}/\partial x_{\mu})_{\rm ex}$ denotes the derivative with respect to x_{μ} occurring explicitly in ζ_{21} . It may be shown that these quantities satisfy differential conservation laws of the form

(19)
$$\frac{\delta Q'(\sigma)_{21}}{\delta \sigma} = 0 , \qquad \frac{\delta P'_{\mu}(\sigma)_{21}}{\delta \sigma} = 0 , \qquad \frac{\delta M'_{\mu\nu}(\sigma)_{21}}{\delta \sigma} = 0 .$$

if one assumes that the fields occuring in (16-18) satisfy the Euler-Lagrange field equations (4). Ideed

(20)
$$\begin{cases} \frac{\partial Q'(\sigma)_{21}}{\sigma} = \partial_{\nu} j_{\nu}(\sigma_{2}\sigma_{1}) + ie\eta^{\alpha} \sum_{i=0}^{s} \frac{\partial \zeta_{21}}{\partial q_{\nu_{1}...\nu_{i}}^{\kappa}} q_{\nu_{1}...\nu_{i}}^{\kappa}, \\ \frac{\delta P'_{\mu}(\sigma)_{21}}{\delta \sigma} = \partial_{\nu} T_{\nu\mu}(\sigma_{2}\sigma_{1}) - \left(\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x_{\mu}}\right)_{\text{ex}}. \\ \frac{\delta M'_{\mu\nu}(\sigma)_{21}}{\delta \sigma} = \partial_{\lambda} M_{\lambda\mu\nu}(\sigma_{2}\sigma_{1}) - T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu} - x_{\mu} \left(\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x_{\nu}}\right)_{\text{ex}} + x_{\nu} \left(\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x_{\mu}}\right)_{\text{ex}}. \end{cases}$$

and the right hand sides of (20) vanish on account of (4).

It is important to note that the differential conservation laws (19) are satisfied independently of the transformation properties of the action integral (1).

If, however, the action integral is invariant with respect to any of the three transformations: translations, rotations and gauge transformations, then we know from (10-12) that the corresponding integral conservation law is satisfied. This conservation law must for consistency be derivable from the corresponding differential law (19). It is easily seen that this is in fact the case. We first notice that on σ_1

$$\begin{cases} Q'(\sigma_1)_{21} = Q(\sigma_1)_{21} + \text{const.}, & P'_{\mu}(\sigma_1)_{21} = P_{\mu}(\sigma_1)_{21} + \text{const.}, \\ \\ M'_{\mu\nu}(\sigma_1)_{21} = M_{\mu\nu}(\sigma_1)_{21} + \text{const.}. \end{cases}$$

We may also show that from the invariance with respect to the gauge transformations of the first kind there follows

(22)
$$Q'(\sigma_2)_{21} = Q(\sigma_2)_{21} + \text{const.},$$

from the invariance with respect to translations

(23)
$$P'_{n}(\sigma_{2})_{21} = P_{n}(\sigma_{2})_{21} + \text{const.},$$

and finally from the invariance with respect to rotations

$$M'_{uv}(\sigma_2)_{21} = M_{uv}(\sigma_2)_{11} + \text{const.},$$

with the same numerical values of the constants as in (21).

From the constancy of Q', P'_{μ} , $M'_{\mu\nu}$ there follow the integral conservation laws (10-12) for Q, P_{μ} , $M_{\mu\nu}$.

It may be noted that the demand of correspondence to local theories is automatically satisfied by an appropriate choice of the constants occurring in (16-18).

This may be easily verified by application of the general results obtained in this paper to any of the current types of non-local field theories.

If it is possible to find tensor densities i_{ν} , $t_{\nu\mu}$, $m_{\lambda\mu\nu}$ such that

$$\begin{cases} \partial_{\nu}i_{\nu} = ie\eta^{\alpha}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial q_{\nu_{1}...\nu_{i}}^{\alpha}}q_{\nu_{1}...\nu_{i}}^{\alpha}, \\ \\ \partial_{\nu}t_{\nu\mu} = -\left(\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x_{\mu}}\right)_{\mathrm{ex}}. \\ \\ \partial_{\lambda}m_{\lambda\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu} - x_{\mu}\left(\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x_{\nu}}\right)_{\mathrm{ex}} + x_{\nu}\left(\frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x_{\mu}}\right)_{\mathrm{ex}}, \end{cases}$$

then the differential conservation laws (19) take the form

(26)
$$\partial_{\nu}(j_{\nu}+i_{\nu})=0, \quad \partial_{\nu}(T_{\nu\mu}+t_{\nu\mu})=0, \quad \partial_{\lambda}(M_{\lambda\mu\nu}+m_{\lambda\mu\nu})=0.$$

Applications to particular types of non-local field theories shall be given in a detailed account of this investigation.

PROPOSTE E DISCUSSIONI

Projet d'un preámbule de principes pour un texte de tables réunissant les unités du Sistème unique dit « MKSA ».

E. PERUCCA

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 12 Gennaio 1953)

Avis. – Ce préambule devant servir pour une publication légale qui précise, en Italie, le Sistème dit « MKSA », l'Auteur serait reconnaissant à tous les savants qui voudraient lui communiquer leurs observations).

1. - Grandeur physique.

Chaque conception utile à la description des phénomènes naturels (physiques) et recevant une définition quantitative, c'est-à-dire mesurable, est une grandeur physique.

Deux grandeurs physiques sont de la même espèce ou physiquement homogènes si l'ou peut établir la signification de leur somme ou de leur égalité, ou bien de leur substitution mutuelle.

Chaque espèce de grandeurs physiques comprend l'ensemble de toutes les grandeurs qui, deux à deux, sont de la même espèce.

Ex.: toutes les longueurs sont des grandeurs de la même espèce.

On dit conventionellement que « la longueur est une (espèce de) grandeur physique ».

2. - Systeme d'équations-base.

Un système de mesure est basé sur l'admission d'un système de relations qui lient grandeurs physiques de différentes espèces (de trois espèces au moins), relations ayant des propriétés conventionnelles de caractère mathématique, correspondant à celles possédées par les grandeurs mathématiques jouant dans les équations algébriques.

C'est pour cela que l'ensemble des relations s'appelle un « système d'équations entre grandeurs physiques ». Ce système d'équations est accepté par tous afin d'en déduire la définition des grandeurs physiques selon les lignes indiquées dans les pages qui vont suivre, et il est dit système d'équations-base ou de définitions.

Un premier groupe de ces équationsbase est, p. ex. le suivant.

$$M ext{\'e} can ique$$
 $l = d$
 $a = l$
 $d = 2 r$
 $\mathcal{L} = f \cdot l$
 $r = l$
 $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m u^2$
 $A = l^2$
 $w = \frac{\varphi}{l}$
 $v = l^3$
 $v = \frac{\omega}{2\pi}$
 $u = \frac{l}{t}$
 $v = \frac{\varrho}{t}$
 $u = \frac{l}{t}$
 $u = \frac{l}{\tau}$
 $u = \frac{1}{v}$
 $u = \frac{1}{v}$

Chaleur . $Q_{c}=\mathcal{L}$ $C_{c}=rac{Q_{c}}{\Theta}$ $C_{c}=rac{Q_{c}}{m}$

Photométrie

$$egin{aligned} arOmega_1 & B arOmega A_{
m app} & E_1 = rac{arOmega_1}{A} \ A_{
m app} = A \end{aligned}$$

$$Q_1 = \Phi_1 \cdot t$$
 $I_1 = \frac{\Phi_1}{\Omega}$

Electromagnétisme (1)

$$f = \frac{1}{\mu_0} \frac{mm}{r^2} \qquad V = \frac{w}{i}$$

$$f = \frac{mil}{r^2} \qquad R = \frac{V}{i}$$

(¹) Soit la succession des équations base soit la forme de certaines équations ne sont pas nécessairement celles indiquées, qui sont

$$i_{}=\frac{q_{}}{t_{}}$$

$$C=\frac{q_{}}{\Upsilon}$$

$$\varepsilon_{0}=\frac{qg_{}}{r^{2}f_{}}$$

Les grandeurs physiques introduites sont:

= longueur A = aire-= volume = durée (de temps) - vitesse - accéleration a_{o} = masse newtonienne force = quantité de chaleur $Q_{\rm e}$ = capacité thermique = chaleur spécifique (1) = température = rayon de cercle, de sphère γ° - diamètre de cercle, de sphère d= arc de cercle a= constante magnétique du vide. μ_0 non rationalisée = masse magnétique, non rationam= intensité du courant électrique = quantité d'électricité q= angle P = travail = énergie cynétique = puissance

établies plutôt afin de montrer la possibilité d'un procédé; heureusement, lorsque le système d'équations-base est suffisamment établi, on s'aperçoit d'avoir toujours atteint le même système.

= vitesse angulaire = fréquence

= période

= stérangle

T

Ω

Nous rappelons, p. ex., l'opportunité de partir pour l'électromagnétisme de l'équationbase

$$f=2\mu_0\frac{iil}{x}$$
,

valable dans les conditions établies pour la définition actuelle de l'ampère, quatrième unité fondamentale.

A_{sph} = aire de sphère

B = luminance

Aapp = aire apparente

 $\Phi_1 = \text{flux lumineux}$

 Q_1 = quantité de lumière

 E_1 = éclairement

 I_1 = intensité lumineuse

 ϵ_0 = constante diélectrique du vide

V = différence de potentiel électrique

R = résistence électrique

C = capacité électrique

Les équations-base ont toujours un contenu conventionnel.

Ex.: $A = l^2$ rappelle la relation entre longueur du côté l et aire A, qu'on suppose carrée, de côté l.

"" I rappelle la relation entre (longueur de l') espace parcouru par un point en mouvement, durée t du temps nécessaire à ce parcours et vitesse u du point, supposée uniforme.

A rappelle que la mesurage de l'aire d'une surface sphérique suit les mêmes principes que le mesurage des aires planes, et que les deux grandeurs sont de la même espèce.

 $Q_1 = \mathcal{E}$ rappelle la chose analogue pour la quantité de chaleur et le travail.

Le système d'équations-base esquissé est suffisant à tous les usages pratiques. Il est formé par un nombre non déterminé d'équations-base, parce qu'il peut être prolongé en lui ajoutant de nouvelles équations-base définissant successivement de nouvelles grandeurs physiques, pourvu, que les nouvelles équations

soient compatibles avec les équations préexistantes (2).

Bien que le nombre d'équations ne soit pas déterminé, on peut établir que le système total, sur lequel nous basons la description des phénomènes physiques connus, contient un nombre de grandeurs physiques dépassant d'au maximum six le nombre des équations.

3. - Grandeurs fondamentales.

En suivant les mêmes règles valables pour les équations algébriques, on peut donc exprimer toutes les autres grandeurs physiques en fonction de six grandeurs (au maximum) indépendantes entre elles et de différentes espèces.

Celles-ci sont le (espèces de) grandeurs dites fondamentales.

Nous fixons les deux points suivants:

1) nous choisissons comme (espèces de) grandeurs fondamentales les six grandeurs suivantes: longueur l, durée l, masse m, intensité de courant électrique i. (intervalle de) température Θ , intensité lumineuse I; chaque grandeur appartenant à une de ces espèces est toujours le produit d'un nombre (mesure) et d'une unité:

2) les unités correspondantes à ces six (espèces de) grandeurs sont dites unités fondamentales; elles sont indépendantes entre elles, et sont les suivantes, et on a accepté internationalement d'écrire leurs symboles en caractère droit :

mètre, m; second, s (ou sec), bes (°), b; ampère, A; celsius, °C (4); candela, cd.

- (4) En particulier, il faudra éviter toute incompatibilité soit entre les noms des différentes grandeurs physiques, soit entre leur symboles.
- (³) Jusqu'à présent on a appelé cette unité chilogragramme-masse.
- (4) La même unité d'intervalle de température est dite aussi « kelvin » (°K).

Les définitions de ces six unités sont exposées dans le premier chapitre du dictionnaire annexé au texte du système unique de mesures.

Dans les cas courants de la mécanique et de l'électromagnétisme on peut se borner à un système d'équations-base avec 4 grandeurs fondamentales, parce qu'on ne touche pas aux phénomènes thermiques et photométriques. On a accepté internationalement de choisir comme grandeurs fondamentales: longueur l, durée t, masse m, intensité de courant électrique i, et comme unités fondamentales: metre m, seconde s ou sec, bes b, ampère A.

Ce système est dit actuellement et par convention MKSA, au lieu de $m \ kg_m \ s \ A$, ou, en accord avec ce schéma: $m \ b \ s \ A$.

4. - Grandeurs derivées.

Toutes les autres grandeurs physiques, introduites par le système d'équations-base, sont dites grandeurs dérivées.

5. - Cohérence.

On divise le système d'équations-base en deux systèmes : le système (d'équations) entre mesures et le système (d'équations) entre unités ou entre dimensions.

Soit [G] l'unité de mesure d'une grandeur physique G en général; soit G le nombre donnant combien d'unités [G] doivent être additionnées pour obtenir la grandeur G considerée.

On a en général:

$$G = G \cdot \{G\}$$
. Ex.: $l = 5 \text{ m}$.

Dans le système accepté on a en général:

$$d[l] = 2 r[l]$$

$$A[A] = l^{2}[l]^{2}$$

$$v[v] = l^{3}[l]^{3}$$

$$\begin{split} \mathbf{u}[\,u\,] &= \frac{\mathbf{l}[\,l\,]}{\mathbf{t}[\,t\,]} \\ \phi[\,\varphi\,] &= \frac{\mathbf{a}[\,l\,]}{\mathbf{r}[\,l\,]} = \frac{a}{r} \\ \omega[\,\omega\,] &= \frac{\phi[\,\varphi\,]}{\mathbf{t}[\,t\,]} \\ \mathcal{S}[\,\mathcal{E}\,] &= \frac{1}{2}\,\mathbf{m}\mathbf{u}^2[\,m\,][\,u\,]^2 \\ \mathbf{v}[\,v\,] &= \frac{1}{2\pi}\,\omega[\,\omega\,] \;. \end{split}$$

Le système des unités de mesure employées pour toutes les grandeurs physiques considérées dans les équationsbase est dit cohérent si l'on établit de diviser le système précédent en deux:

équations entre

mesures (rélations

numériques)

équations entre unités ou

entre dimensions (rélations

conventionnelles) pour la

	Constense
$A = I_8$	$[A] = [l]^2$
$v = 1^{3}$	$[v] = [l]^3$
$u = \frac{1}{t}$	$[u] = rac{[l]}{[t]}$
$\phi \ = \frac{a}{r}$	$[\varphi] = 1$
$\omega = \frac{\varphi}{t}$	$[\omega] = \frac{1}{[t]} - [t]^{-1}$
$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \text{mu}^2$	$[\mathcal{E}] = [m][u]^2$

Pour plus de clarté voici deux exemples particuliers:

 $[v] = [t]^{-1}$

L'équation de définition de la vitesse u en fonction du parcours l et de la durée t est:

$$\mathbf{u}[u] = \frac{\mathbf{l}[l]}{\mathbf{t}[t]}.$$

équation qu'on divise, en accord avec

la cohérence, en:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{t}} \qquad \qquad [u] = \frac{[l]}{[t]}$$

équation entre mesures (donc: entre nombres) équation entre unités ou entre dimensions (done: conventionnelle)

L'équation-base de definition de l'énergie cinétique en fonction de la masse m et de la vitesse (de translation) u s'écrit:

$$\mathcal{E}\{\mathcal{E}\}:=\frac{1}{2}\;\mathrm{mu}^2[m]\!\cdot\![u]^2$$

et elle se divise, selon cohérence, en:

$$\label{eq:energy_energy} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \, \mathrm{mu}^2 \qquad \qquad [\mathcal{E}] = [m] \cdot [u]^2.$$

En particulier, dans le système que nous introduisons, on a en unités cohérentes:

$$|t|$$
 m, $|t|$ sec.

$$|\{u\}| = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}, \qquad |\{\mathcal{E}\}\rangle = \mathrm{bes} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2}.$$

La cohérence donne toujours un système d'équations-base entre grandeurs physiques formellement identique au système d'équations entre mesures, tandis que le système entre unités peut en différer parce qu'il est dépourvu de tous les coefficients numériques $\neq 1$, paraissant dans les équations-base entre grandeurs; p. ex. le coefficient 2 dans l'équation de définition de \mathcal{E} .

Ces coefficients sont tous dans les équations entre mesures.

Unités principales ou unités derivées cohérentes: dimensions.

Le système d'équations entre unités, dont on vient de parler dans le § 5, est un système d'équations conventionnelles, qui, cependant, jouit des mêmes propriétés d'un système d'équations algébriques; il permet d'exprimer les relations ayant un sens conventionnel mais bien établi, existantes entre toutes les unités de mesure cohérentes du système.

En particulier, ces unités cohérentes peuvent s'exprimer en fonction d'unités fondamentales, qui sont au maximum en nombre de six (v. § 3).

Les unités cohérentes subordonnées. c'est à dire exprimées en fonction d'unités fondamentales, sont les unités dérivées cohérentes ou unités principales.

Le système des équations entre unités (cohérentes), en particulier après résolution qui nous permet d'exprimer les unités principales en fonction des unités fondamentales, est nommé aussi système des équations aux dimensions.

('haque (espèce de) grandeur fondamentale et son unité (fondamentale aussi) ont pour dimension l'unité fondamentale elle-même.

Ex.: la longueur a pour dimension m. Chaque (espèce de) grandeur dérivée et son unité principale ont les dimensions résultant de la résolution que nous venons d'indiquer pour le système d'équations entre unités.

Ex.: si b, m, sec sont les unités fondamentales, on a:

$$[\mathcal{E}] = \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{sec}^{-2}$$
.

Et l'on dit que soit l'énergie cynétique, soit son unité $[\mathcal{E}]$ (cohérente principale) ont les dimensions bes, mètre-carré, seconde à moins 2.

Quelques unités principales sont définies dans le texte qui suit.

7. - Équation de conversion.

Certaines équations-base ont la forme simple $G_1 = G_2$, à écrire aussi $G_1[G_1] = G_2[G_2]$; mais il est $G_1 \neq G_2$, donc $[G_1] \neq [G_2]$.

Ces équations signalent l'existence

de grandeurs de la même espèce physique (en effet, on établit leur égalité). mesurées dans des unités de mesure différentes

Le équations de cette forme sont nommées équations de conversion; elles peuvent s'écrire toujours sous la forme:

$$\mathbf{1}[G_1] = \frac{\mathbf{G_2}}{\mathbf{G_1}} \left[G_2 \right] = k[G_2].$$

ou, plus simplement:

$$[G_1] = rac{G_2}{G_1}[G_2] = k[G_2].$$

ou, encore:

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = k$$
.

Le coefficient k a le caractère d'une mesure (rapport entre les deux unités) et il est un nombre pur.

Ex.: 1 inch = 0.0254 m ou, plus simplement, inch = 0.0254 m.

Dans chacune de ces équations on a une constante (numérique) universelle de conversion k, laquelle peut avoir deux caractères bien différents:

— nombre pur fixé par définition, donc exact; p. ex. 0,0254 dans l'exemple dernier; dans ce cas l'une des unités est subordonnée à l'autre à travers une dépendance mathématique, de définition;

— nombre expérimental, qui est donc approximé dans les limites fixées par les soins de l'expérience: p. ex. k = 0.02539998 (dernier chiffre incertain) dans l'exemple donné; cela signifie que les deux unités ont été préfixées indépendamment, et l'expérience nous a révélé que leur rapport est constant (constante métrologique universelle) dans les limites des erreurs de l'expérience.

8. - Unités subordonnées.

Elles sont les unités multiples ou sousmultiples des unités fondamentales ou principales; elles ont trouvé leur raison d'être dans le fait que leur usage est plus commode dans certains cas.

Voici des exemples:

— unités subordonnées mathématiquement et décimalement:

$$cm = \frac{m}{100}$$

pour les longueurs (m, unité cohérente; en plus, fondamentale); stilb = 10⁴ nit pour la luminance (nit, unité cohérente);

— unités subordonnées mathématiquement, mais non décimalement:

$$\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ sec}} = \frac{1}{3.6} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \text{ pour la vitesse};$$

 $kWh = 1000 \cdot 3600 \text{ watt \cdot sec} =$

= 3.6·10° joule pour l'énergie

— unités subordonnées expérimentales:

voltélectron, énergie acquise par électron qui « monte » d'un potentiel de l volt dans un champ électrique; cette unité est déterminée expérimentellement parce que telle est la charge électrique d'un électron [— $(1,6020\pm0,0005)\cdot10^{-19}$ coulomb]; le voltélectron est donc une unité sousmultiple, pas du tout simple, de l'unité cohérente, et connue seulement aux erreurs d'observation près.

La valeur (exacte ou affectée d'incertitude expérimentale) laquelle spécifie le multiple (ou sousmultiple) caractérisant l'unité subordonnée est une constante universelle et a les mêmes fonctions d'une constante de conversion (n. 7).

En effet, chaque équation de conversion peut se considérer:

soit comme introduction d'une nouvelle grandeur physique dans le système des équations-base; ex.: longueur en inches, outre que longueur en mètres (on dit que c'est barbare de l'appeler « métrage »);

— soit, plus simplement, comme l'introduction d'une unité subordonnée.

Moment moteur et travail - Equidimensionnalité - Adimensionnalité.

On a bien des fois signalé l'inconvenient que, dans le système-base accepté au n. 2, le moment moteur et le travail, qui sont des grandeurs physiquement non homogènes ont la même unité donc les mêmes dimensions $[l] \cdot [f]$; dans notre système ces dimension sont: $m \cdot N = m^2 \cdot b \cdot \sec^{-2}$, le symbole N indicant le newton, unité principale de force.

On trouve cela parce qu'on n'indique pas d'une manière différente le produit vecteur et le produit scalaire dans l'expression des grandeurs prises comme unités.

Ces deux unités devraient étre respectivement

$$m \cdot N$$
 et $m \wedge N$.

On peut cependant se limiter seulement aux deux cas schématiques m parallèle a N et m normal à N

respectivement.

L'exemple le plus fameux d'équidimensionnalité entre grandeurs d'éspèces différentes est éclairei dans sa substance.

Mais, dans la succession illimités des grandeurs physiques qu'on peut définir dans un système logique d'équations-base, on ne peut pas absolument éviter l'existence de grandeurs physiques dérivées appartenant à des espèces différentes, mais équidimensionnelles; en particulier l'existence de grandeurs physiques qui dans ce système sont adimensionnelles.

10. - Radian - Stéradian.

En accord avec le système d'équations-base considérées, l'angle (plan) et l'angle solide (ou stérangle) sont des grandeurs adimensionnelles (5); donc leur unité ne peut pas avoir de nom (ni de symbole).

Cependant l'usage se surpose à cette règle métrologique et dans le système que nous avons accepté nous avons les termes radian, stéradian.

Pour les angles solides, stéradian est le nom de l'unité cohérente, adimensionnelle; p. ex., on dit « angle solide de $\pi/2$ stéradians » au lieu de « angle solide $\pi/2$ ».

Dans le cas des angles (plans) l'unité cohérente adimensionnelle a pris le nom radian; p. ex. « angle (plan) π radians » au lieu de « angle (plan) π ».

Le terme radian peut avoir une raison dans le fait qu'on a en usage aussi d'autres unités (angle droit, tour, grade, dégré) et l'utilité d'un nom pour l'unité cohérente devient évidente.

Nous considérons *très dangereux* que ces unités soient considérées réellement fondamentales.

L'usage et l'utilité des noms de ces unités doivent être reservés dans la Métrologie à leur emploi comme unités de référence dimensionnelles (6) dans les équations entre dimensions, c'est-à-dire comme unités dont la présence est nécessaire (ou utile) aux contrôles dimensionnels.

Ces unités doivent être toutes reconnaissables, il faut donc leur donner un nom et un symbole spécial, même si elles devaient être anonymes étant adimensionnelles.

⁽⁴⁾ Agrandissement en «diamètres», fréquence en «cycles à la seconde», force magnéto-motrice en «ampère-tours» sont des autres cas.

^(*) PERUCCA: Grandezze fisiche. Dimensioni. Sistemi di misura, in Atti Acc. Sc. Torino, 79, 38 (1944).

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

G. Kortüm und H. Buchholz-Meisenhelmer – Die Theorie der Distillation und Extraktion von Flüssigkeiten. Mit 139 Abbildungen, viii + 381 Seiten. Springer Verlag. Berlin 1952.

Il titolo di teoria della distillazione e della estrazione dei liquidi viene in realtà molto meglio precisato nella prefazione, dove gli AA. dicono di aver voluto svolgere, in forma corrispondente ai concetti moderni, la termodinamica delle miscele di liquidi. Essi riallacciano il loro lavoro a quello del Kuenen, Theorie der Verdampfung und Verflüssigung von Gemischen (Leipzig, 1906), osservando appunto che dopo di allora mancava nella letteratura un lavoro di carattere essenzialmente teorico che svolgesse, in modo sistematico ed aggiornato, tale argomento.

Il libro si inizia con un capitolo che è la premessa essenziale ad una trattazione del genere in questione: i modi di rappresentazione grafica degli stati di equilibrio. Con il secondo capitolo si entra nel vivo: il potenziale chimico di un sistema, le condizioni di equilibrio e la loro dipendenza dalle variabili che ne caratterizzano lo stato, le condizioni di coesistenza delle varie fasi vengono trattate in modo sistematico e coordinato, con grande chiarezza. Il terzo capitolo è dedicato alla classificazione termodinamica dei vari tipi di miscele: è forse il più interessante. Vengono messe a raffronto, discusse e confrontate con i risultati sperimentali le leggi classiche di Raoult, di Henry, le diverse equazioni di stato proposte ed entrate in uso per i gas reali. Dai limiti trovati per la loro validità scende evidente il significato delle distinzioni stabilite tra miscele ideali e miscele reali, tra soluzioni regolari e soluzioni non regolari. Il quarto capitolo è dedicato interamente ai coefficienti di attività delle miscele, soprattutto allo studio matematico delle varie approssimazioni proposte per il loro calcolo.

Con il quinto capitolo comincia una nuova parte del libro: in esso si esaurisce brevemente la parte generale relativa ai sistemi a miscibilità limitata. Il capitolo seguente è tutto dedicato agli equilibri liquido-vapore: passano sotto i nostri occhi i sistemi a uno, a due, a tre componenti, i vari modi di rappresentare graficamente gli equilibri, lo studio preliminare sui diagrammi delle operazioni necessarie alla separazione dei componenti la miscela. Con questo capitolo si comincia a sentire giustificato il titolo del libro e questa giustificazione diventa completa nel settimo ed ultimo capitolo che tratta propriamente la teoria della separazione dei vari componenti di una miscela. La trattazione, naturalmente, è fatta soprattutto dal punto di vista teorico, volta ad interpretare le tecniche di lavoro ed i principi costruttivi delle apparecchiature usate.

La parte che precede gli ultimi capitoli, e cioè oltre metà del volume, serve in effetti da introduzione ad essi. Una introduzione, se si vuole, un po' abbon-

dante, ma comunque logicamente completa. Nelle intenzioni degli AA. il libro è diretto al pratico che voglia dare alla sua esperienza un fondamento teorico: e questo scopo può dirsi certamente raggiunto. Tuttavia la prima parte dell'opera, in modo particolare i primi tre capitoli, è molto raccomandabile agli studenti ed ai neolaureati che desiderino approfondire un argomento che è tra i più suggestivi della termodinamica. La trattazione matematica molto piana, il frequente confronto con i risultati sperimentali, riportati dalla letteratura e raccolti in numerose tabelle, un gran numero di diagrammi ed una gradevole chiarezza tipografica rendono la lettura agevole e la materia viva. Una aggiornata bibliografia, raccolta nelle ultime pagine in ordine alfabetico per autore, completa il volume.

G. MILAZZO

B. Finzi e B. Udeschini – Esercizi di Meccanica razionale, Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano 1952, pagg. VIII+ 516.

I criteri che gli AA. hanno avuto di mira nello stendere questa vasta raccolta di esercizi di Meccanica sono esplicitamente espressi nella bella prefazione intesa ad illustrare, da un punto di vista pedagogico, i principali momenti concettuali nella risoluzione di un problema meccanico che sono poi gli stessi, si potrebbe aggiungere, che caratterizzano una qualunque ricerca scientifica o progettazione tecnica: a) scelta dello schema nel quale rappresentare l'oggetto della nostra considerazione; b) traduzione del problema fisico in un problema di geometria o di analisi matematica; c) risoluzione del problema matematico; d) ritorno ai termini fisici e interpretazione dei risultati.

Il proposito di far cosciente lo studente, sia esso avviato a una laurea scientifica o ad una meta professionale, di tale organica costituzione della ricerca e della necessità di non trascurare alcupo dei suoi elementi essenziali è certamente assai degno di lode anche se, inevitabilmente, nel successivo svolgimento dei numerosissimi problemi che formano il volume in esame gli AA. non hanno dato a tali diversi elementi lo stesso peso. Non sarebbe stato possibile. infatti, in un volume di natura scolastica. porre problemi che non fossero già, almeno in massima parte, preventivamente schematizzati, nell'uno o nell'altro degli schemi tipici della Meccanica. Sarebbe invece forse stato possibile, anche a costo di sacrificare un po' il numero complessivo degli esercizi, un qualche maggiore commento dei risultati.

Nel complesso io penso che il proposito degli AA. di fornire una guida efficace per lo studio della Meccanica sia stato, a lavoro ultimato, pienamente conseguito. Gli oltre mille esercizi che costituiscono il volume, taluni classici, moltissimi nuovi scelti con sobria fantasia. spaziano in tutti i campi della Meccanica, dalla Statica del punto alla Dinamica dei fluidi, dalla Teoria della similitudine ai Moti impulsivi, dalla Dinamica delle verghe alla Meccanica celeste. Taluni esercizi, desunti dall'esperienza quotidiana, sono per ciò stesso specialmente adatti a sviluppare nel lettore il senso fisico: alcuni tra questi, particolarmente piacevoli ed istruttivi, sono trattati in via puramente qualitativa riuscendo però a dare convincente ragione di curiosi fenomeni di osservazione abituale (ricorderemo a titolo di esempio la discussione qualitativa, veramente esauriente, del pur classico «salto del gatto » e la spiegazione qualitativa, mediante il teorema del Bernoulli, di noti fenomeni idrodinamici). Altri problemi; a carattere meno concreto e talora anche artificioso, sono più atti invece a impratichire il lettore nei metodi di risoluzione. Lo stesso problema è talora affrontato con procedimenti diversi, e a tutti i metodi che la Meccanica ha a sua disposizione viene dato, nel volume, posto adeguato.

Talora vengono trattati, in capitoli diversi, problemi tra loro molto simili, differenti soltanto per una piccola modificazione dello schema, modificazione che si dimostra talvolta essenziale tal'altra trascurabile. Ben sa chi ha pratica di insegnamento, quanto sia efficace tale raffronto: ci sia permesso però di notare che nel volume in esame sarebbe spesso desiderabile che il ravvicinamento tra problemi analoghi e il relativo confronto fosse più esplicito.

Quasi tutti i problemi a sviluppo quantitativo hanno, accanto alla trattazione letterale, dati e conclusioni numeriche. Sottolineata è pure l'importanza di una costante verifica dimensionale delle formule e il lettore viene abituato a frequenti cambiamenti di sistemi di unità.

Dopo ciò, una rapida rassegna degli argomenti credo possa bastare a dare una idea abbastanza completa del libro. I primi cinque capitoli sono dedicati alla Cinematica (del punto, dei sistemi rigidi, di sistemi più complessi, dei mezzi continui) sia assoluta, sia relativa. Altri cinque capitoli riguardano la Statica; nel cap. VIII alcuni problemi di equilibrio di travi elastiche costituiscono una vera premessa ai metodi della Scienza delle Costruzioni; alcuni esercizi del capitolo successivo, relativi prevalentemente alla Idrostatica, sono volti a spiegare alcuni classici paradossi o a confutare erronei ragionamenti pseudointuitivi. Un intero capitolo, il decimo, è dedicato ai metodi di calcolo statico che si ispirano a quello strumento potente e fecondo che è il Principio dei lavori virtuali, ove l'uso sistematico di coordinate lagrangiane consente, non appena si sia acquisita una certa pratica, l'impostazione immediata di ogni problema statico senza attrito.

I successivi capitoli, salvo uno desti-

nato alla valutazione delle costanti strutturali di un solido e delle varie grandezze meccaniche di un generico sistema, riguardano la Dinamica, con il medesimo ordine seguito in Statica (punto materiale, corpi rigidi, sistemi composti, mezzi continui mono- o pluri-dimensionali). Alcuni dei problemi trattati nel cap. XIX, riguardanti le vibrazioni di corde e verghe o il moto di un liquido, mostrano come anche con searsi mezzi matematici possano ottenersi talvolta risultati cospicui.

Terminano il volume un capitolo sul moto impulsivo e uno di ricapitolazione.

C. CATTANEO

Annual Review of Nuclear Science, vol. I, 1952, pagg. x+645. Annual Reviews, Inc., Stanford, California 1952.

L'ormai ben nota collezione delle Annual Reviews si è arricchita quest'anno del primo volume di una nuova serie: la « Annual Review of Nuclear Science ».

Si tratta di un insieme di ventisei articoli, assai diversi tra loro per importanza e per mole, su argomenti particolari di fisica nucleare pura ed applicata. Di questi articoli, alcuni sono vere e proprie messe a punto di una determinata branca della fisica nucleare, mentre altri si limitano ad essere rapidi riassunti appena organizzati dei lavori pubblicati entro l'anno in un determinato campo di ricerca.

Non è naturalmente possibile, in questa sede, discutere uno per uno i singoli argomenti trattati. Ci limiteremo pertanto a dire che i primi sei articoli della Rassegna riguardano la fisica nucleare fondamentale e trattano della fisica dei mesoni, della teoria della struttura nucleare, dei livelli energetici dei nuclei leggeri, dei momenti nucleari, delle

interazioni nucleari dei raggi cosmici e delle masse e abbondanze degli isotopi. Seguono sei articoli di tecniche, dei quali cinque dedicati alle grandi macchine ed uno ai vari metodi di rivelazione delle particelle nucleari.

Il resto della Rassegna è dedicato in gran parte alla fisica nucleare applicata ed ad argomenti collaterali. Un gruppo di cinque articoli riguarda i metodi di separazione degli isotopi stabili e l'impiego dei metodi della fisica nucleare alla risoluzione di problemi di carattere chimico. Seguono quattro articoli in cui la spettroscopia, i fenomeni alle basse temperature, la metallurgia e la geochimica sono considerati sotto quegli aspetti (fondamentali o tecnici) che presentano un interesse per la fisica nucleare. Gli

ultimi cinque articoli riguardano gli effetti biologici delle radiazioni e l'uso degli isotopi stabili e radioattivi come indicatori in biologia e medicina.

Come si vede, si è ben lontani dal ricoprire tutto il vastissimo campo della fisica del nucleo. Ciò avverrà probabilmente solo nel corso di alcuni anni, con la pubblicazione dei successivi volumi: già infatti il secondo volume, di cui si annunciano i titoli, colmerà alcuna delle lacune più importanti.

Nel suo complesso, questo primo volume, pur nella inevitabile provvisorietà di molti articoli, costituisce un utilissimo strumento di informazione e di lavoro, che consigliamo vivamente a tutti coloro che s'occupano attivamente dell'argomento.

M. AGENO